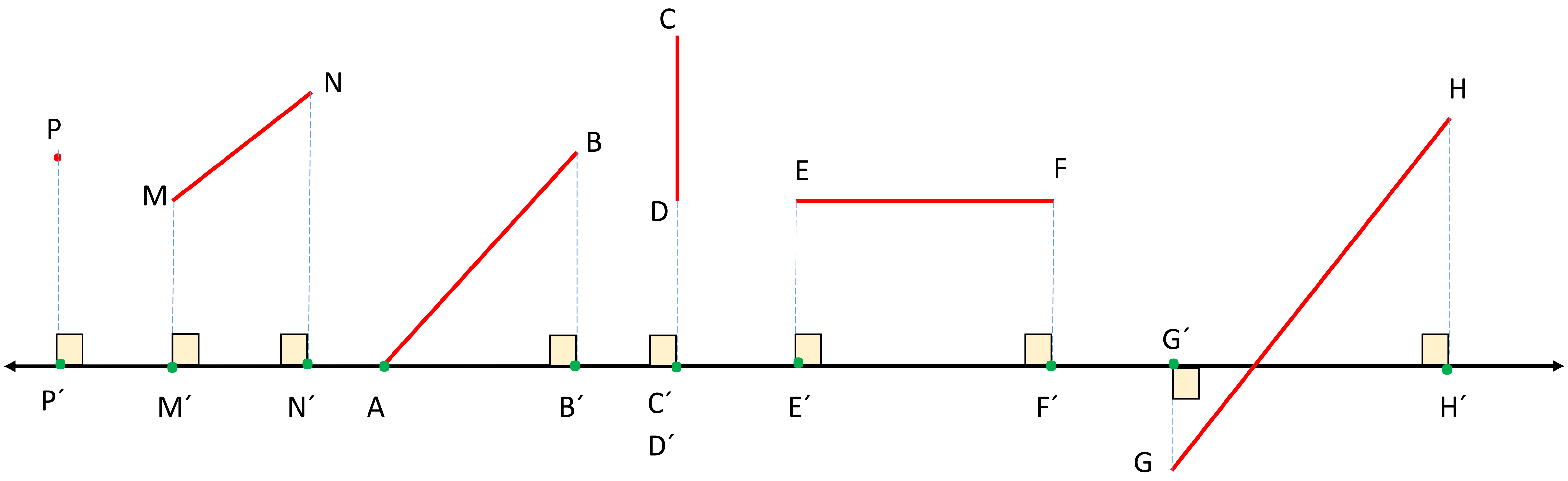
GEOMETRÍA

Profesor
Alex Noa

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS



P´: Proyección de P sobre la recta L

M´N´: Proyección de MN sobre la recta L

AB´: Proyección de AB sobre la recta L

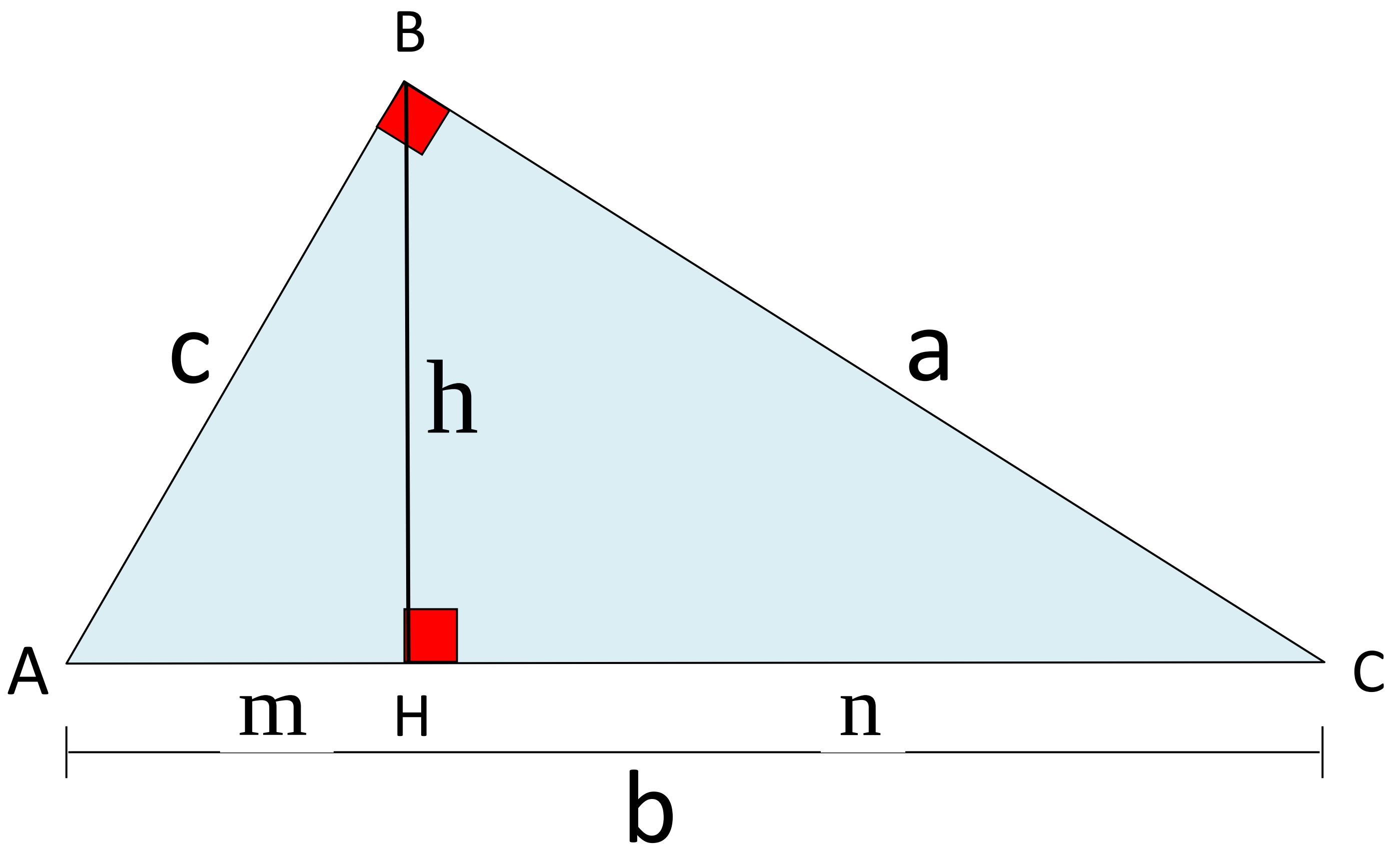
C´: Proyección de CD sobre la recta L

E´F´: Proyección de EF sobre la recta L

G´H´: Proyección de GH sobre la recta L

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

Sea ABC, un triángulo rectángulo, recto en B



$$c^2 = b.m$$

$$a^2 = b.n$$

$$h^2 = m.n$$

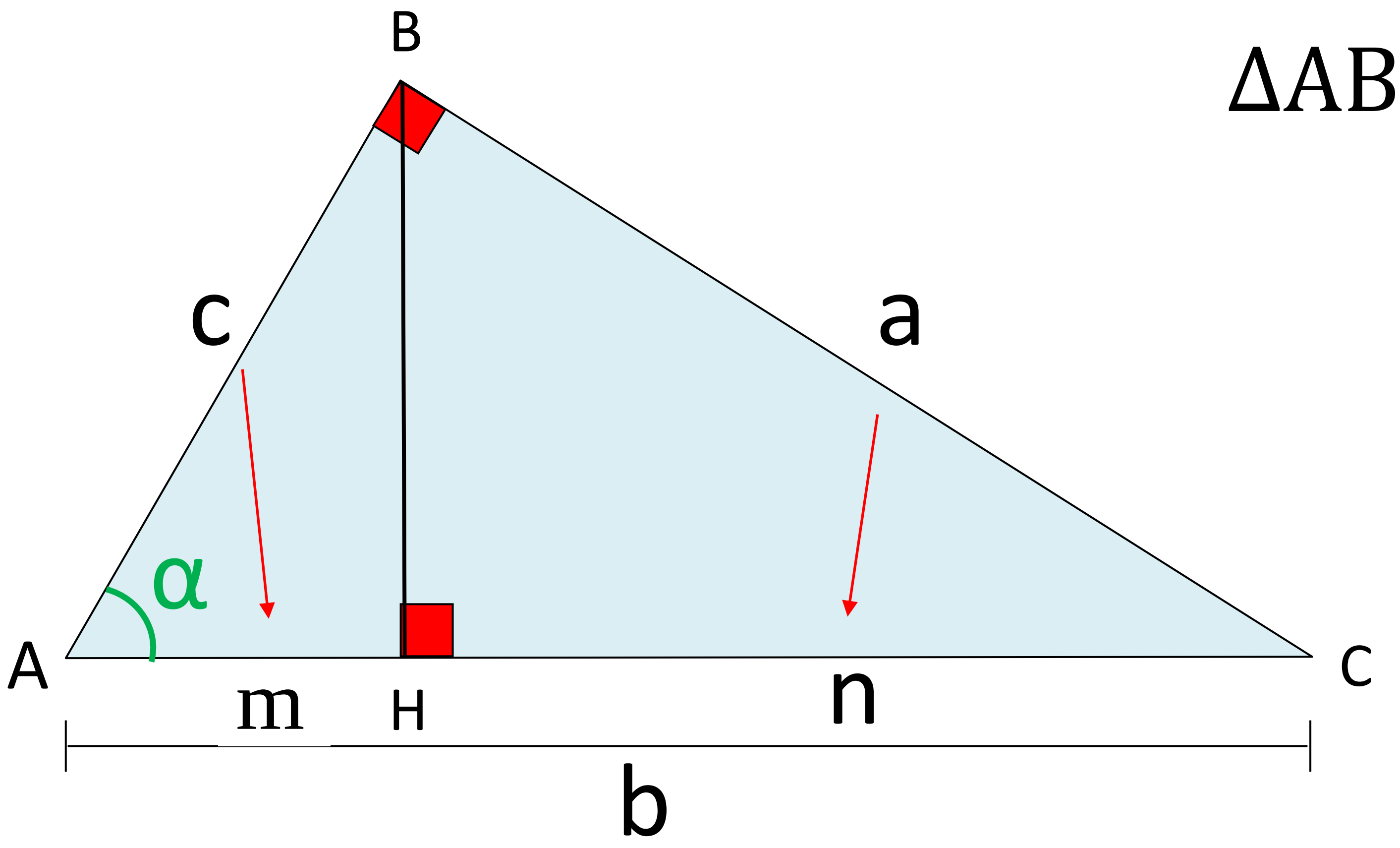
$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$a.c = b.h$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

$$\boxed{c^2 = b.m}$$



$$\Delta AHB: \quad \text{Cos}\alpha = \frac{m}{c}$$

$$\Delta ABC: \quad \text{Cos}\alpha = \frac{c}{b}$$

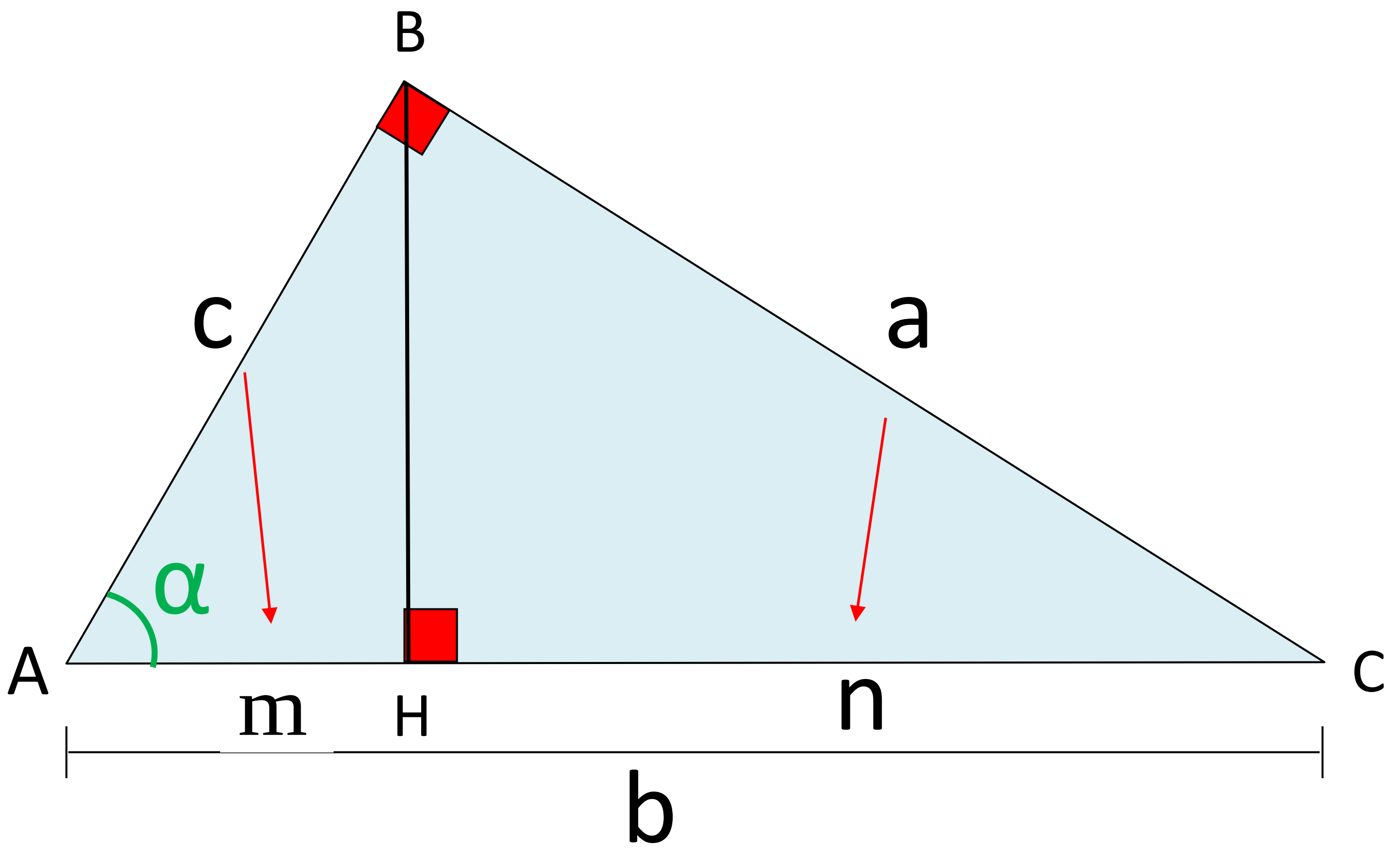
$$\Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow c^2 = bm$$

$$\Rightarrow a^2 = bn$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

$$b^2 = a^2 + c^2$$



$$c^2 = bm$$

$$a^2 = bn$$

$+$

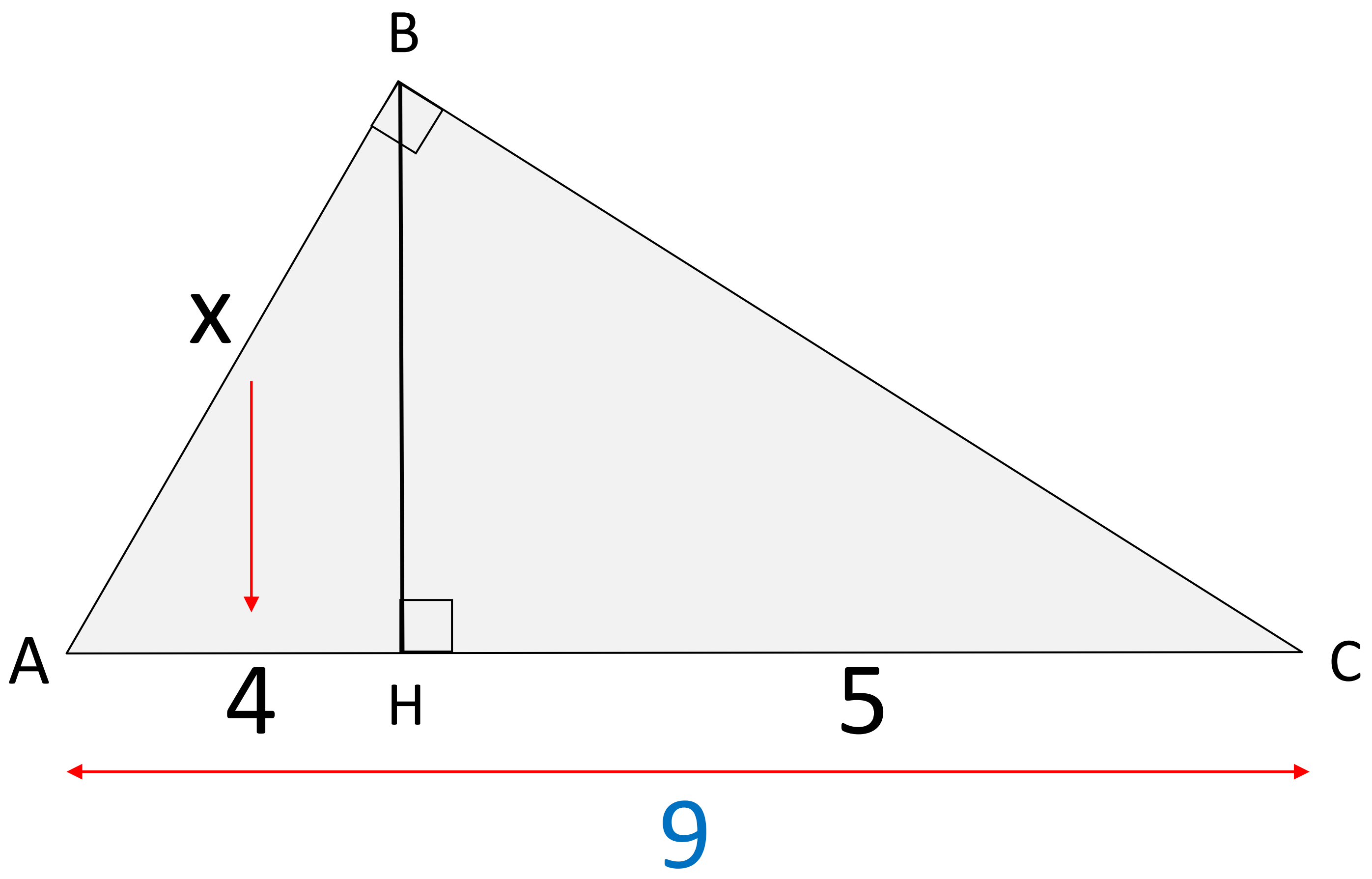
$$c^2 + a^2 = bm + bn$$

$$c^2 + a^2 = b(m + n)$$

$$c^2 + a^2 = b(b)$$

$$c^2 + a^2 = b^2$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS



Calcular x

$$c^2 = bm$$

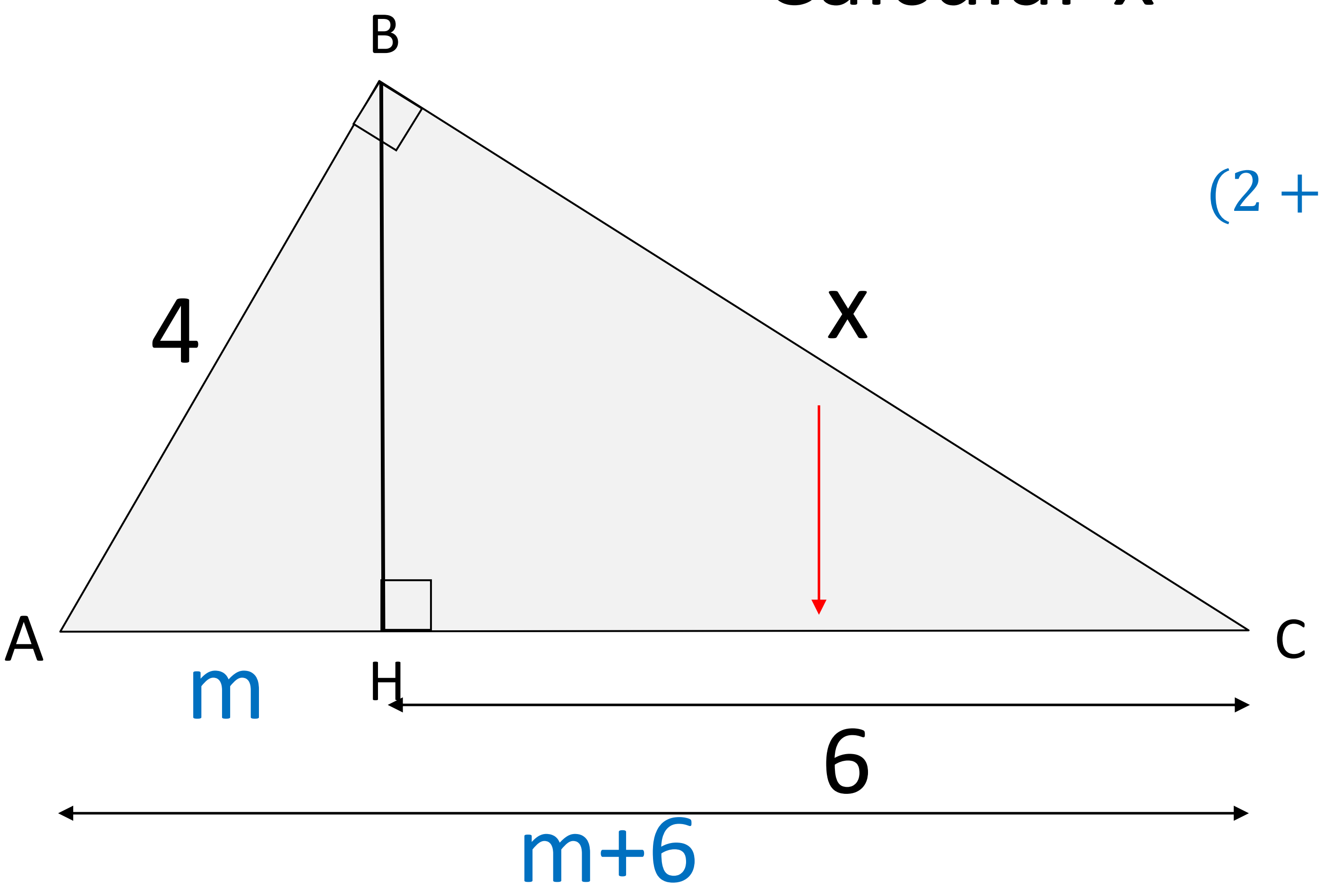
$$x^2 = 9.4$$

$$x^2 = 36$$

$$\boxed{X = 6}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

Calcular x



$$4^2 = (m+6).m$$

$$16 = (m+6).m$$

$$(2+6).2 = (m+6).m$$

$$m = 2$$

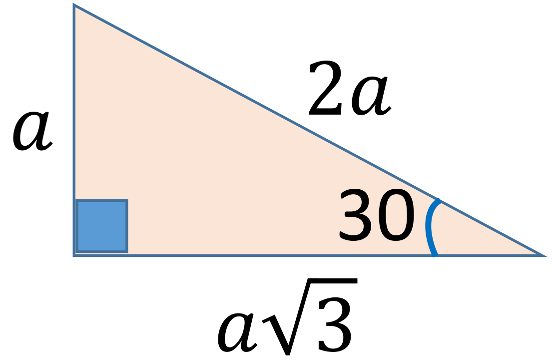
$$x^2 = (m+6).6$$

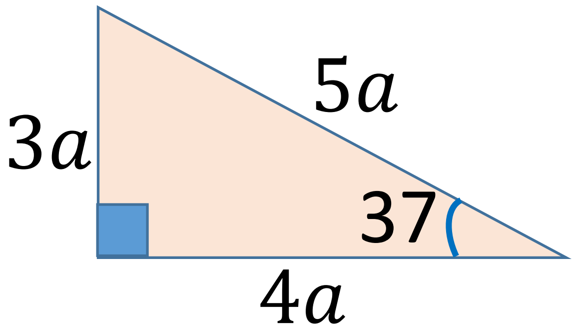
$$x^2 = (2+6).6$$

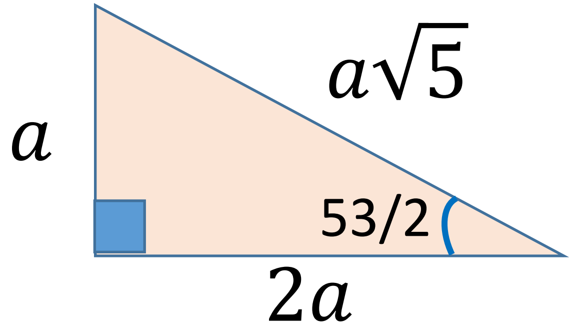
$$x^2 = 16.3$$

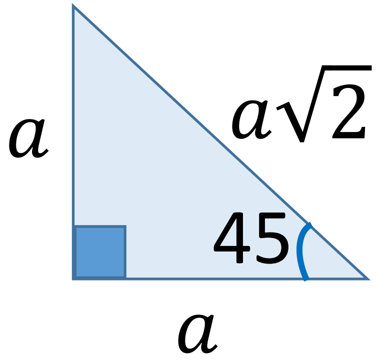
$$\boxed{x = 4\sqrt{3}}$$

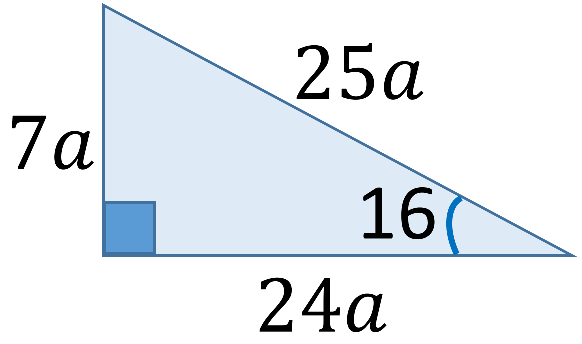
RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

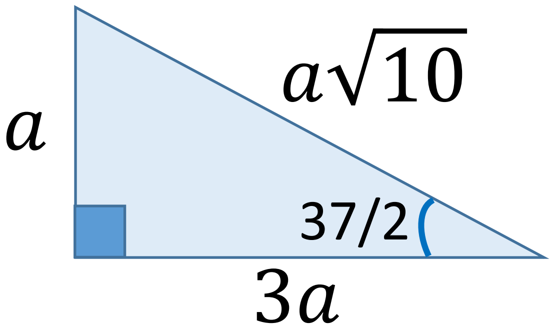




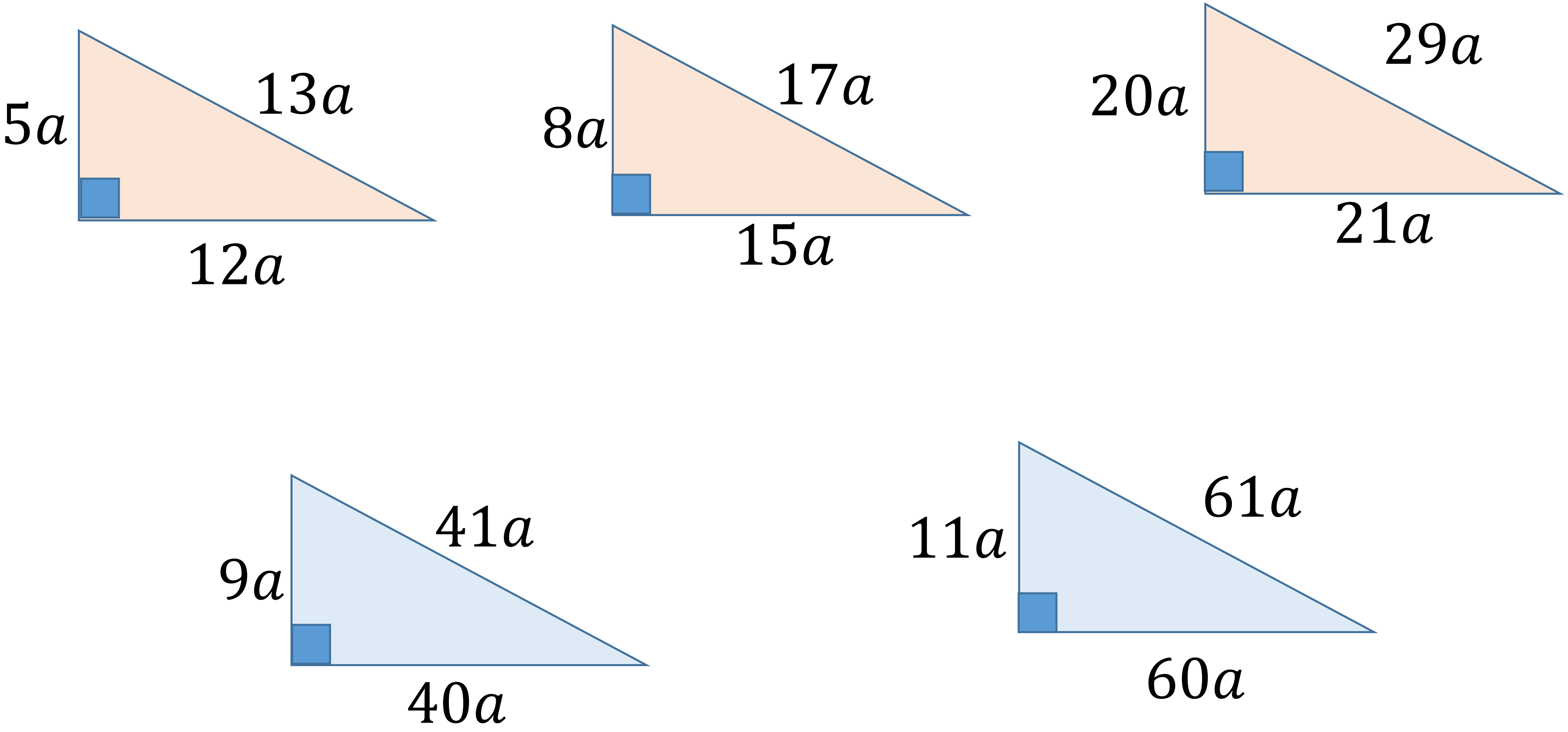








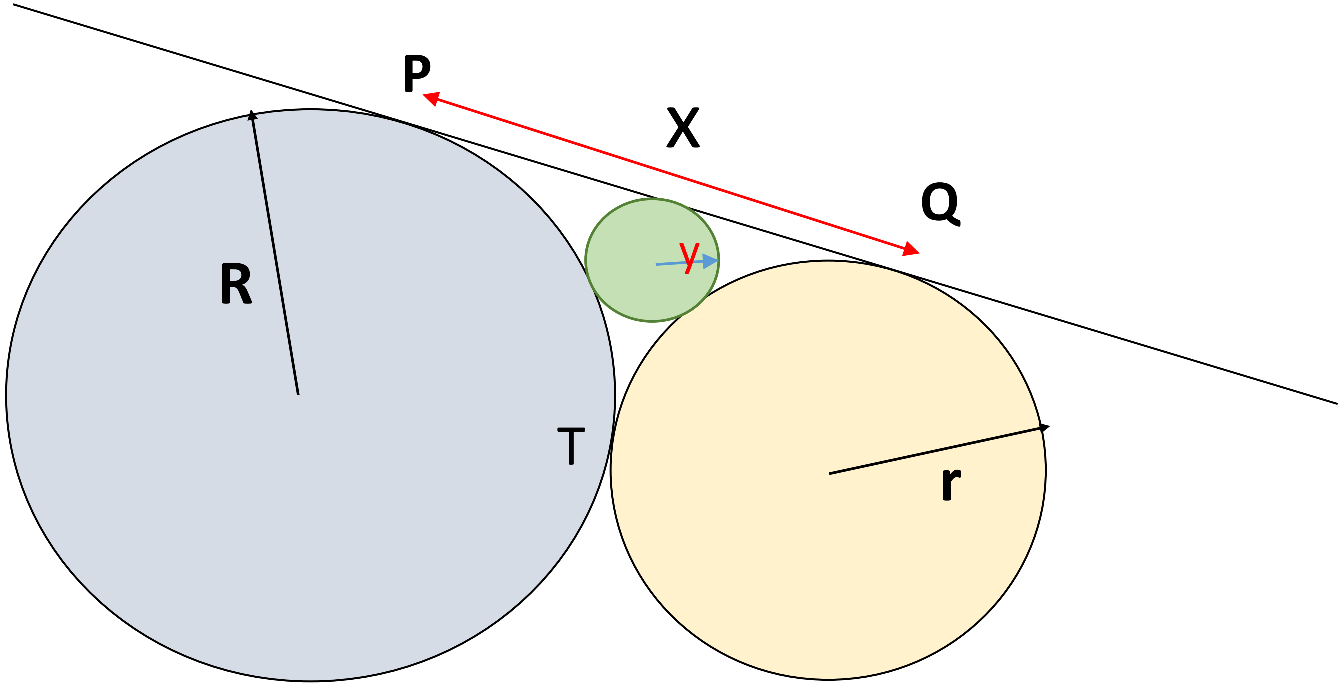
RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS



RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

PROPIEDAD

Si P, Q y T son puntos de tangencia



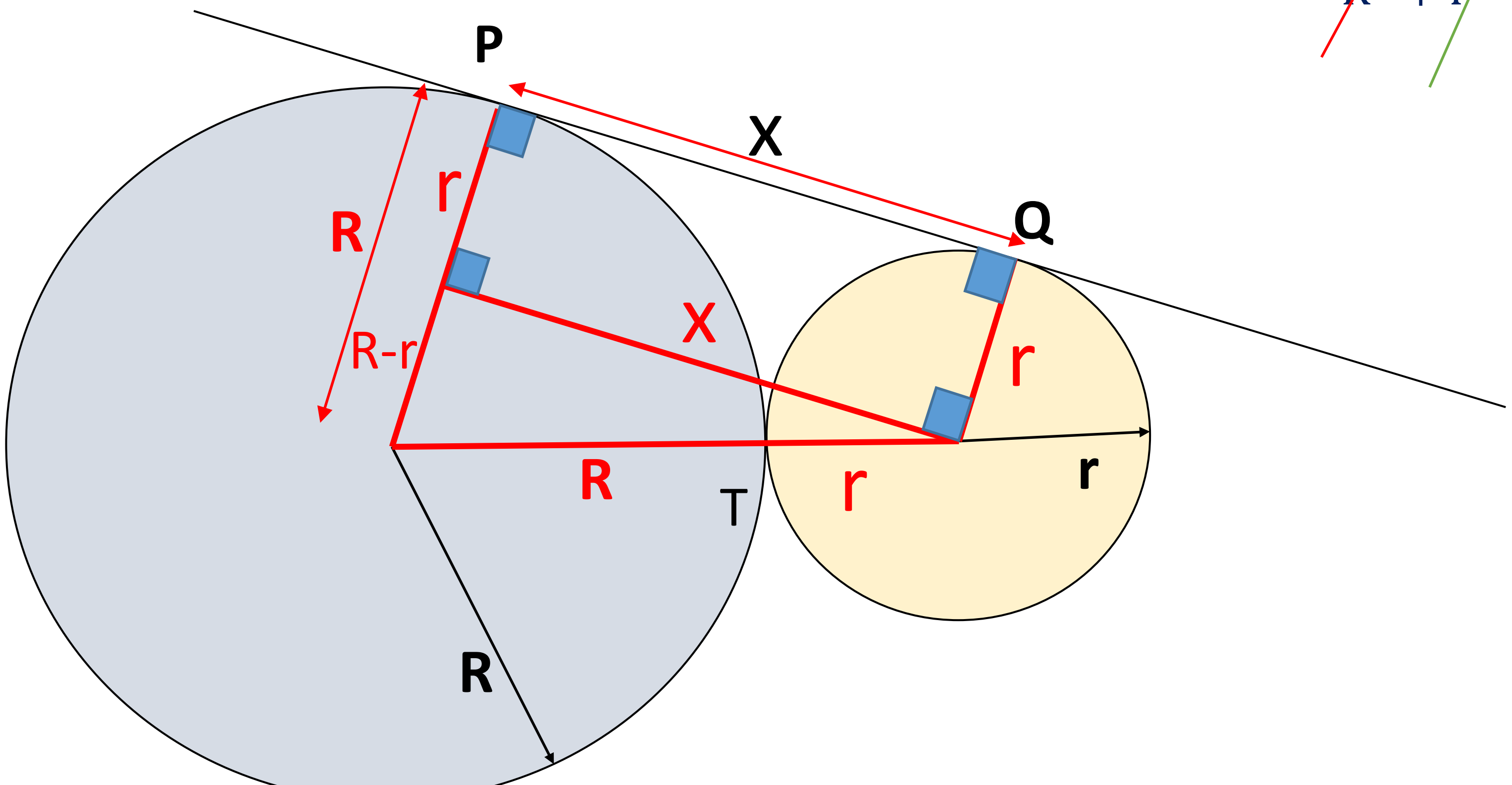
$$X=2\sqrt{Rr}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

PRUEBA

$$X=2\sqrt{Rr}$$



Por el teorema de Pitágoras:

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + x^2$$

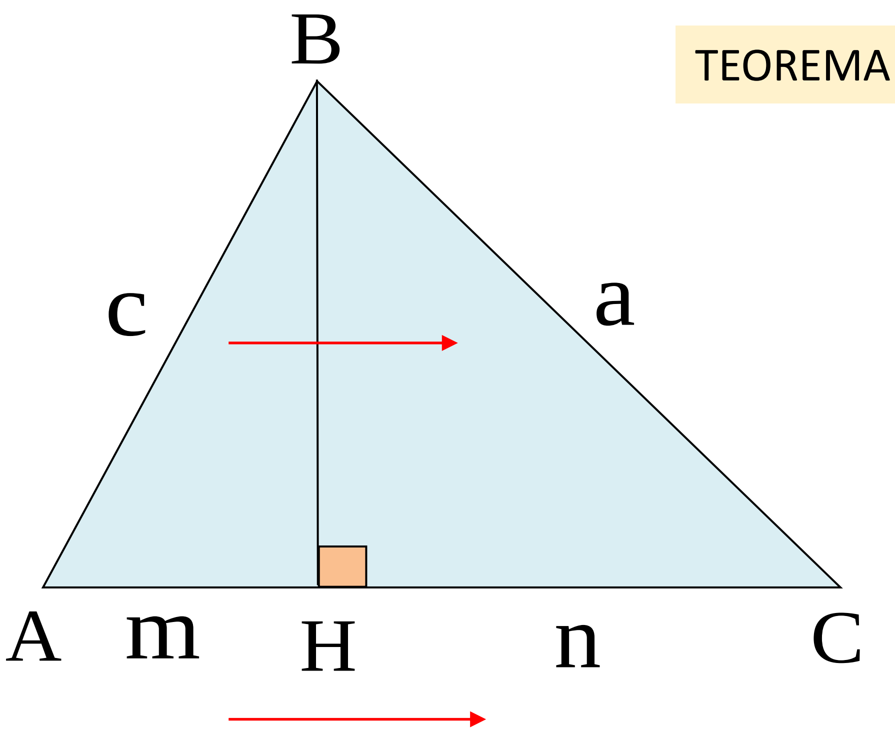
$$\cancel{R^2} + \cancel{r^2} + 2Rr = \cancel{R^2} + \cancel{r^2} - 2Rr + x^2$$

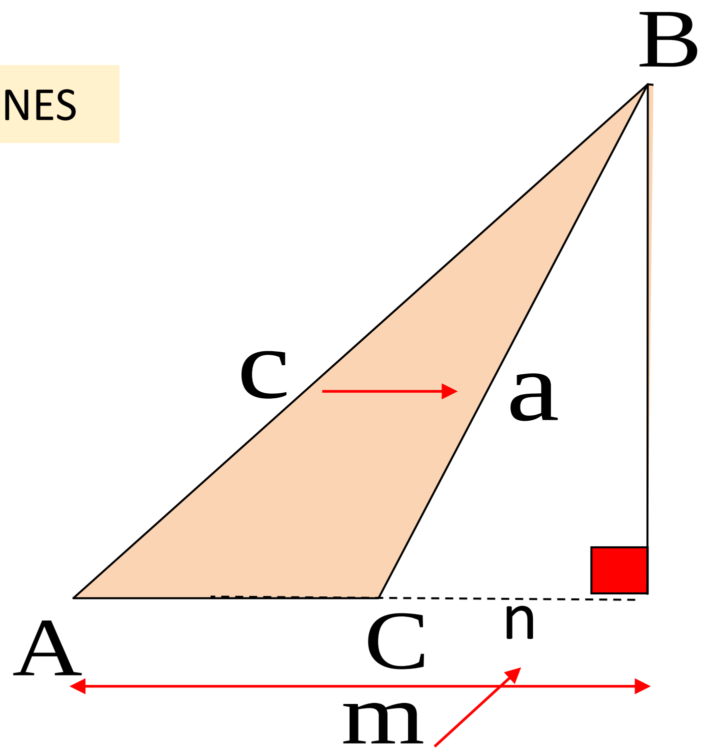
$$4Rr = x^2$$

$$\boxed{2\sqrt{Rr} = x}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES



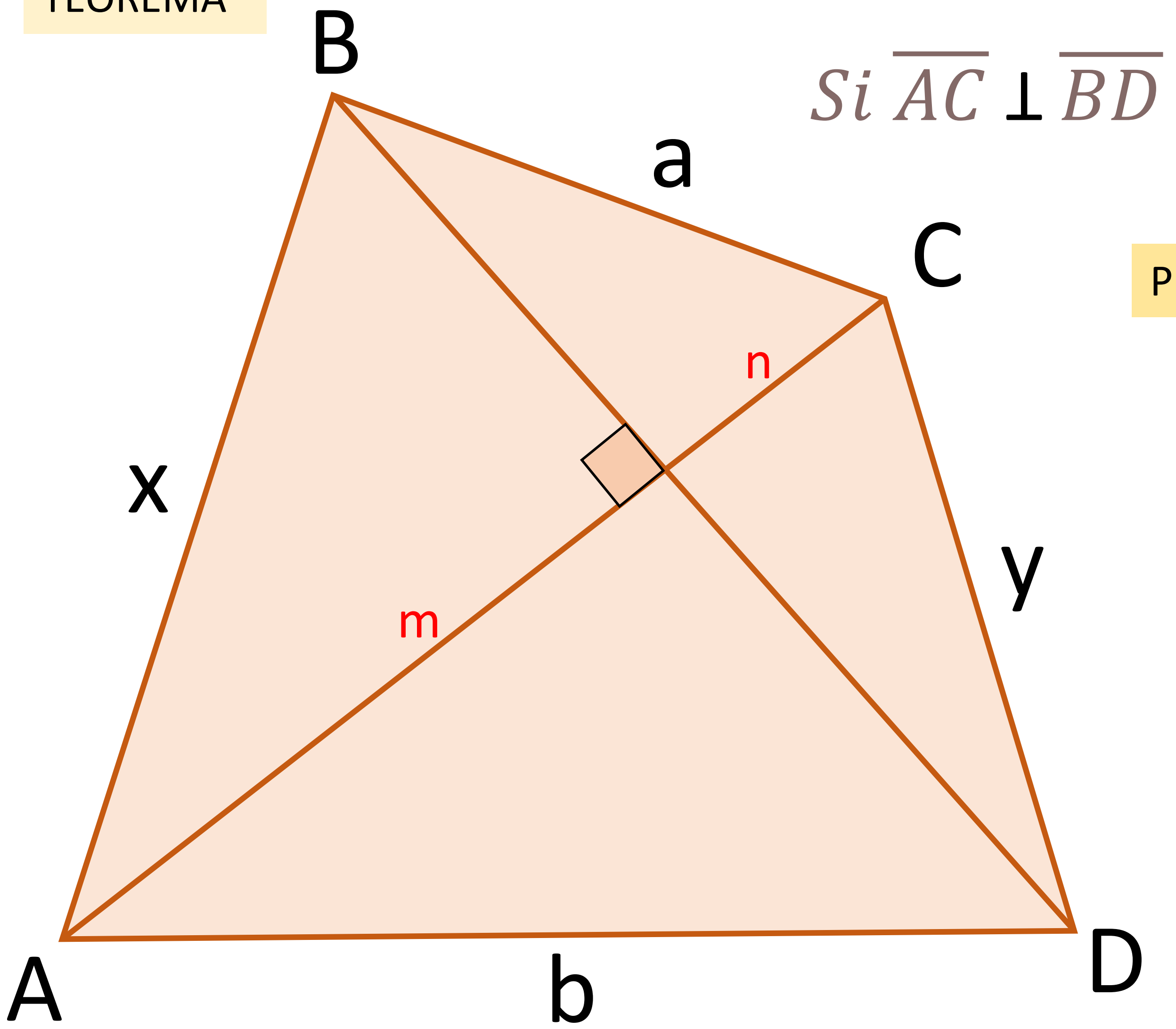


$$c^2 - a^2 = m^2 - n^2$$

$$c^2 - a^2 = m^2 - n^2$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA



$Si\ \overline{AC} \perp \overline{BD}$ $\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

PRUEBA

Por el teorema de las proyecciones:

$$x^2 - a^2 = m^2 - n^2$$

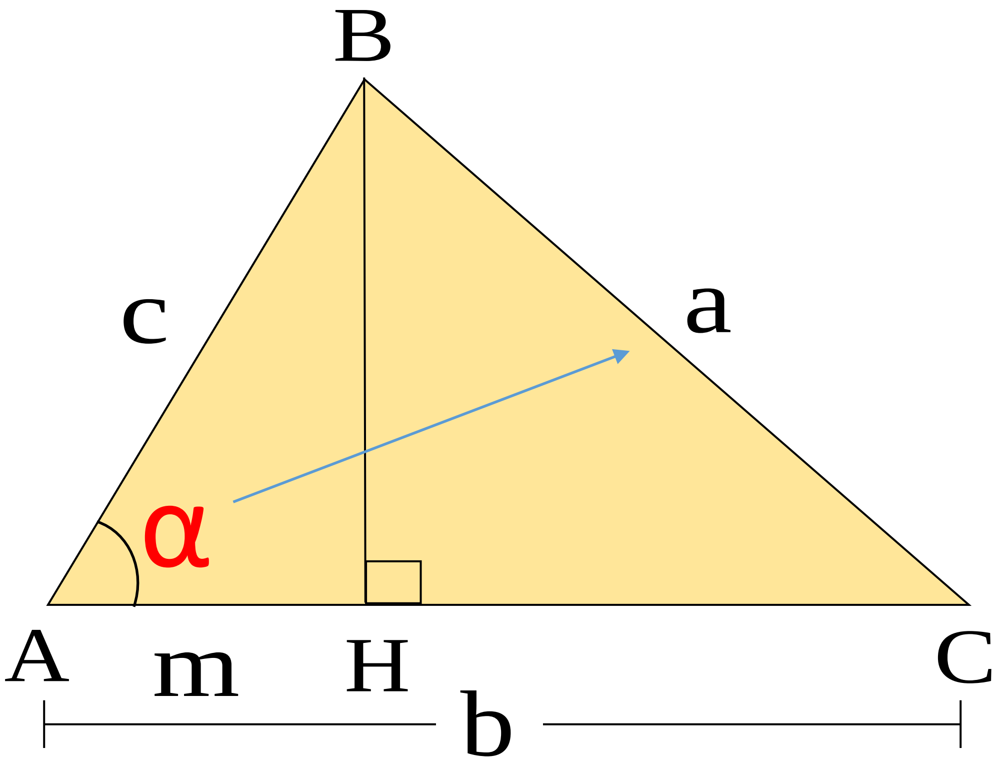
$$\wedge \quad b^2 - y^2 = m^2 - n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - a^2 = b^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = b^2 + a^2$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

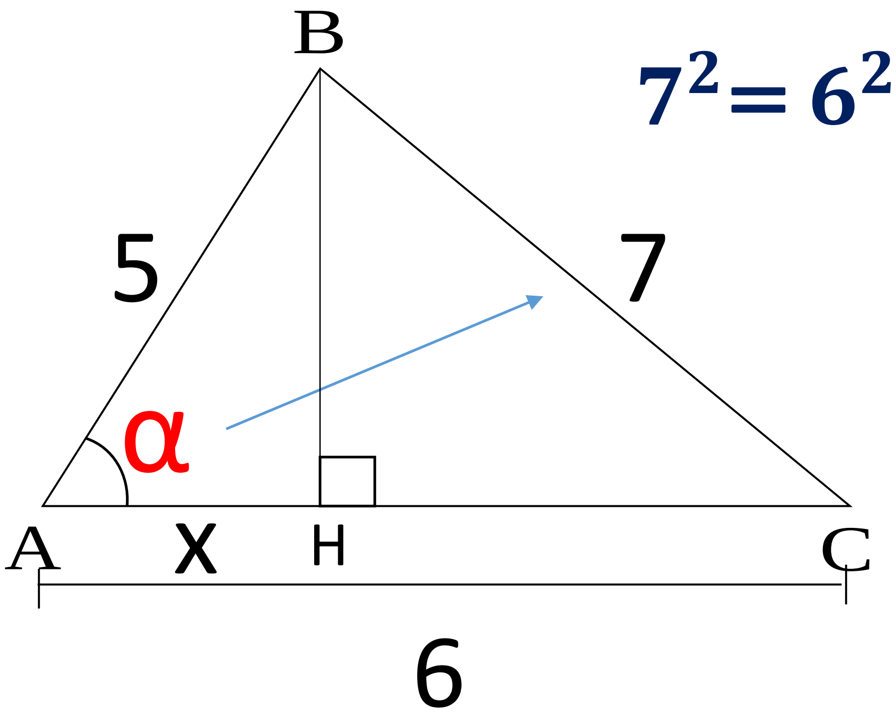
TEOREMA DE EUCLIDES



AH es la proyección de AB sobre AC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

En un triángulo ABC, AB=5, BC=7 y AC=6. Calcular la longitud de la proyección de AB sobre AC.



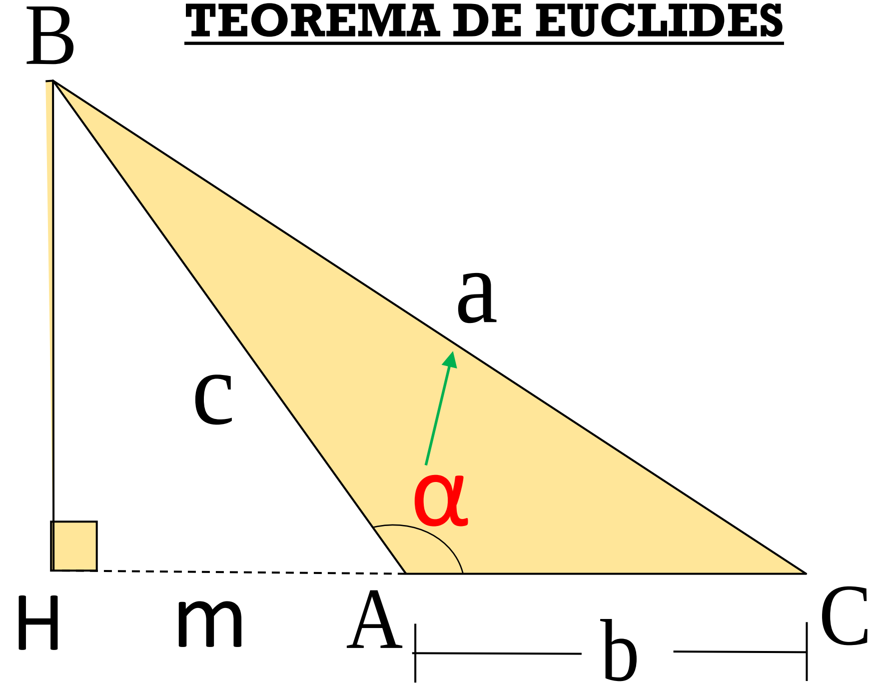
$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2.6.x$$

$$12x = 12$$

$$x = 1$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

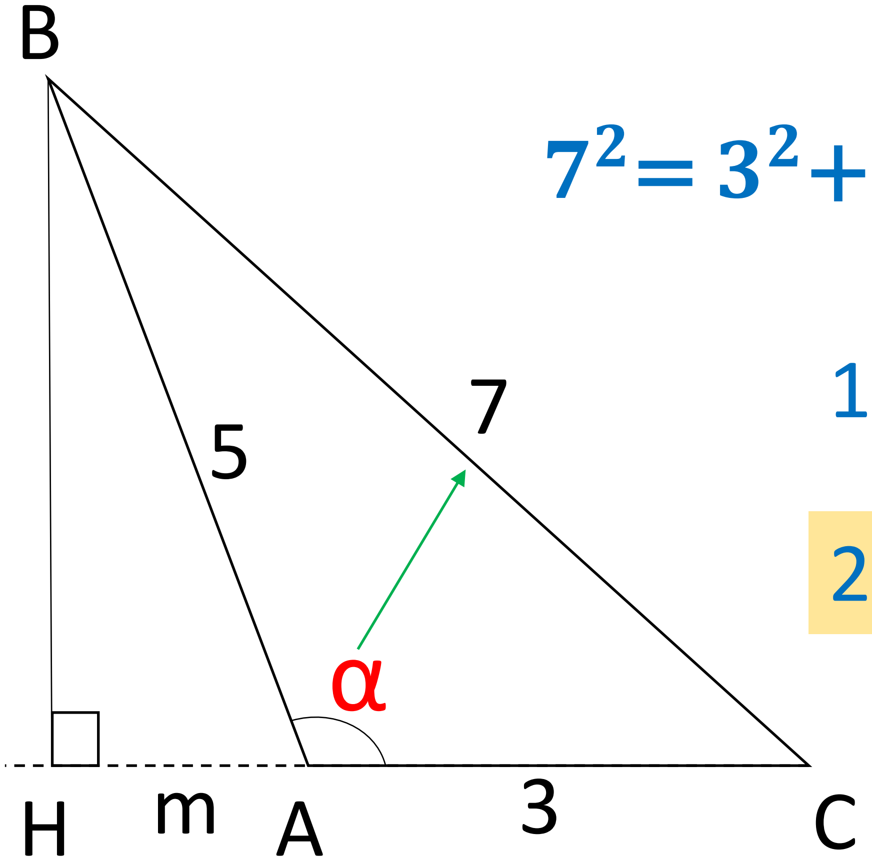
TEOREMA DE EUCLIDES



AH es la proyección de AB sobre AC

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$$

En un triángulo ABC, AB=5, BC=7 y AC=3. Calcular la longitud de la proyección de AB sobre AC.



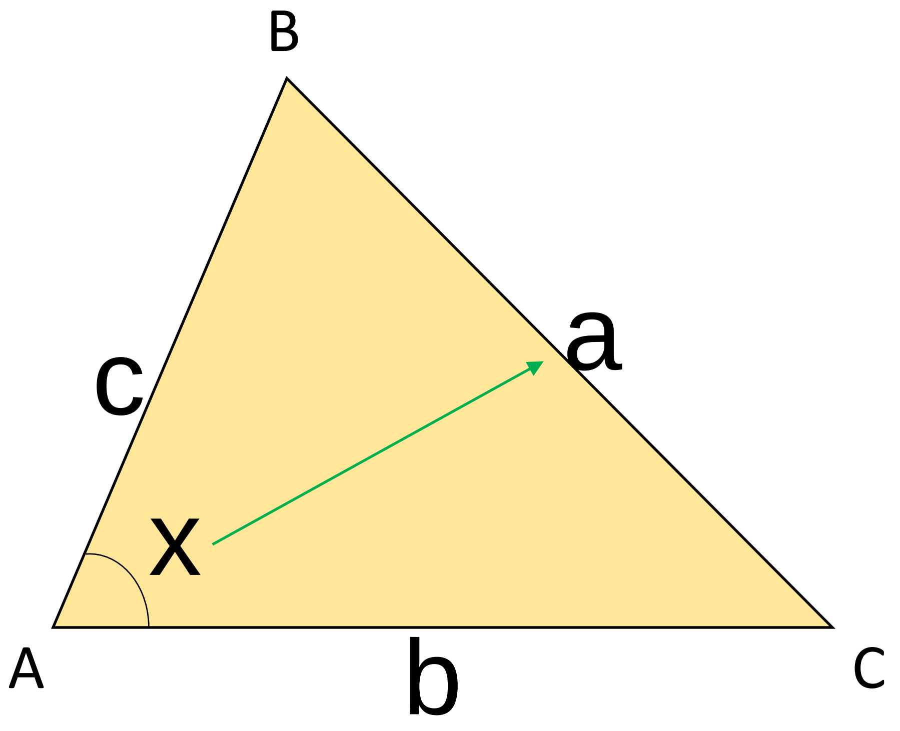
$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2.3.m$$

$$15 = 6m$$

$$\boxed{2,5 = m}$$

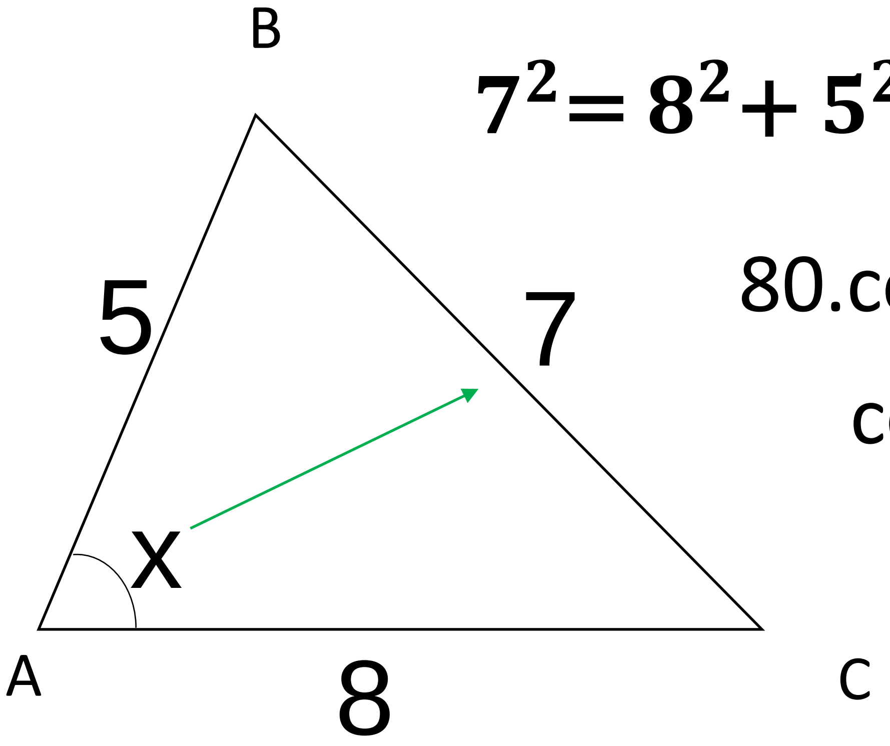
RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA DE COSENO



$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.cosx}$$

En la figura, calcular el valor de x



$$\mathbf{7^2 = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.cosx}$$

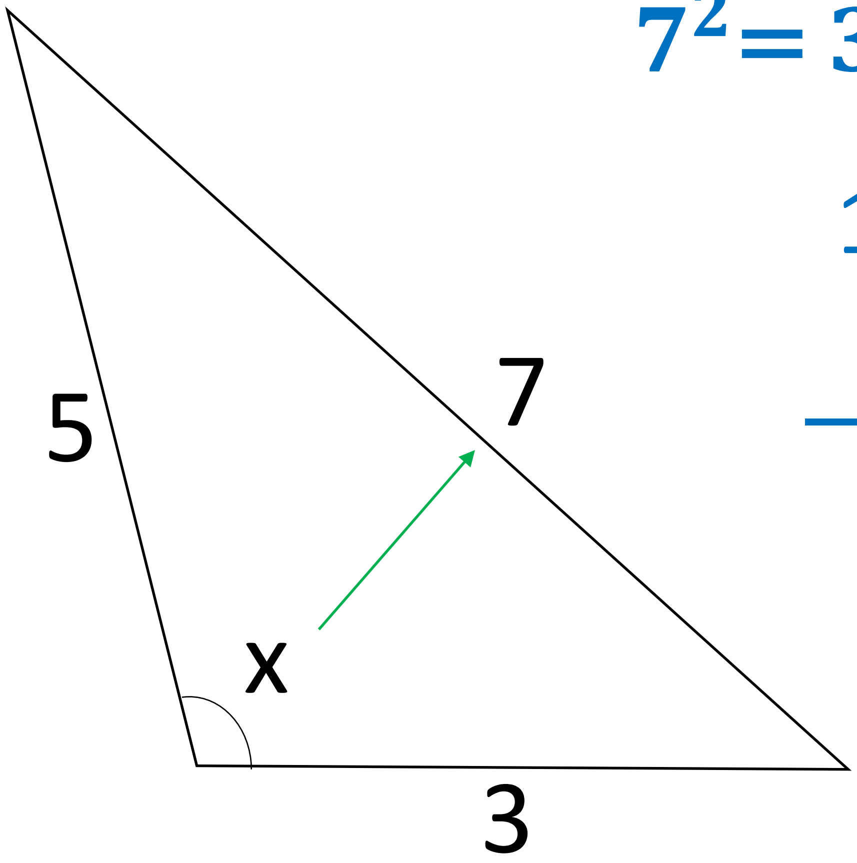
80.cosx = 40

cosx = 1/2

x = 60

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

En la figura, calcular el valor de x



$$\mathbf{7^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.cosx}$$

$$15 = -30.cosx$$

$$-\frac{1}{2} = cosx$$

$$\boxed{x = 120}$$

NOTA

Si x + y =180

→ senx = seny

Si x + y =180

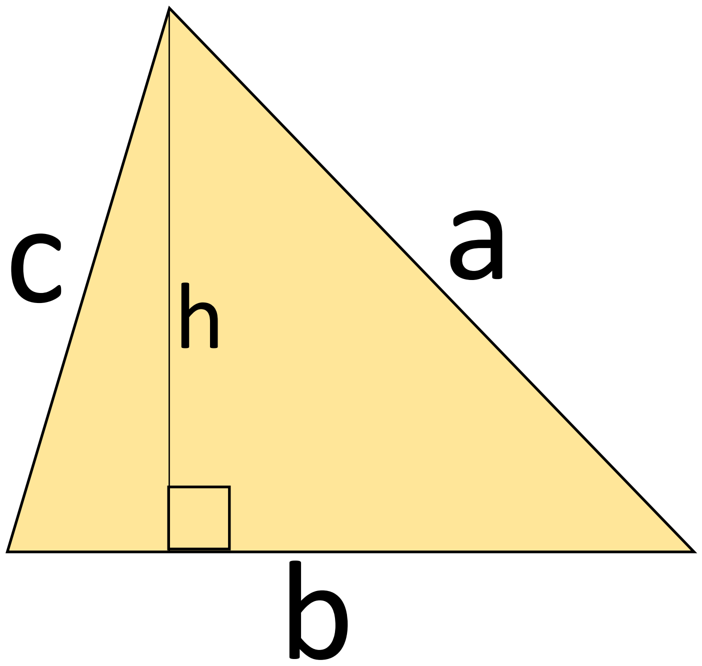
→ cosx = -cosy

60

$= -\frac{1}{2}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA DE HERÓN

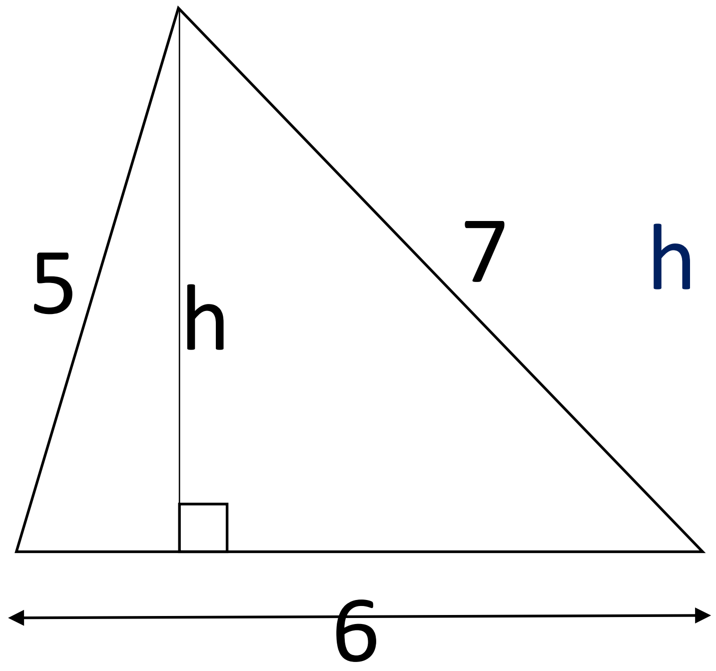


$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

En la figura, calcular el valor de h

$$p = \frac{5+6+7}{2} = 9$$



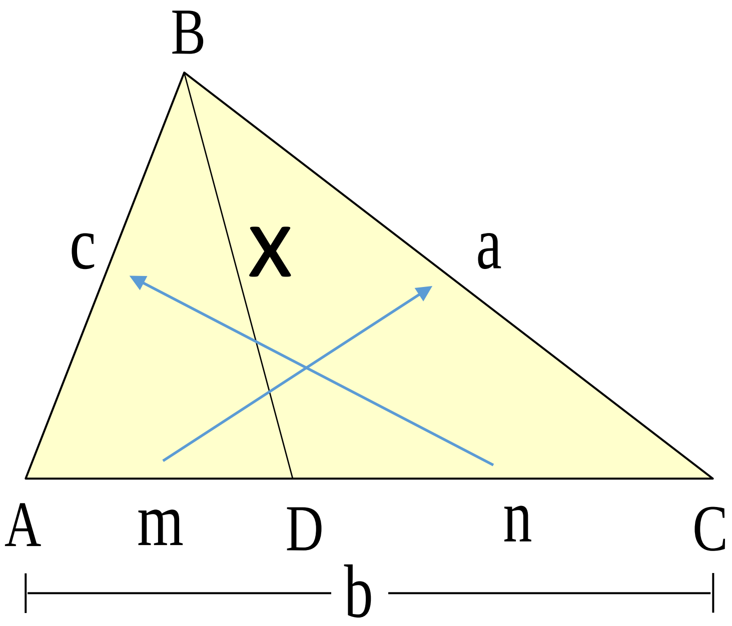
$$h = \frac{2}{6}\sqrt{9(2)(3)(4)}$$

$$h = \frac{2.6}{6}\sqrt{(2)(3)}$$

$$h = 2\sqrt{6}$$

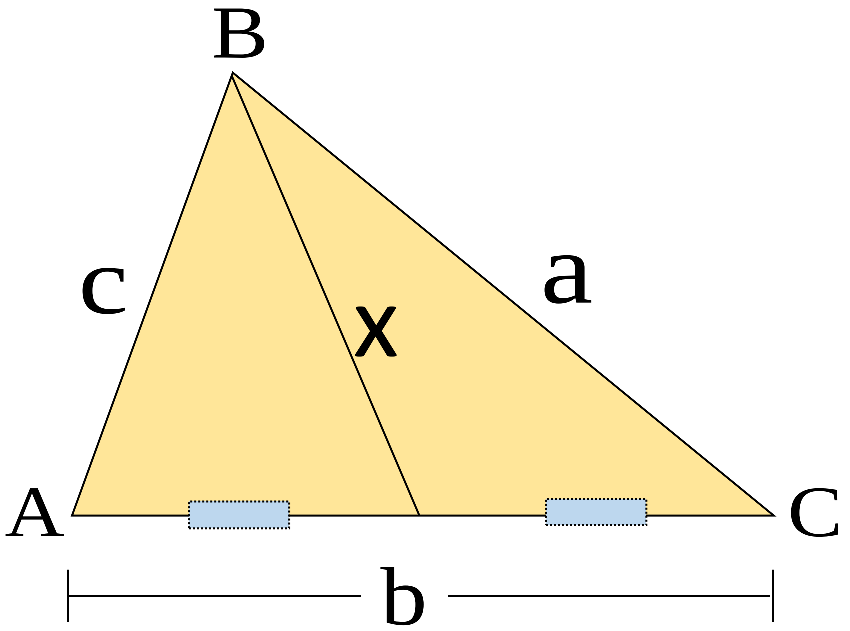
RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA DE STEWART



$$\mathbf{x^2\,b = a^2\,m + c^2\,n - mnb}$$

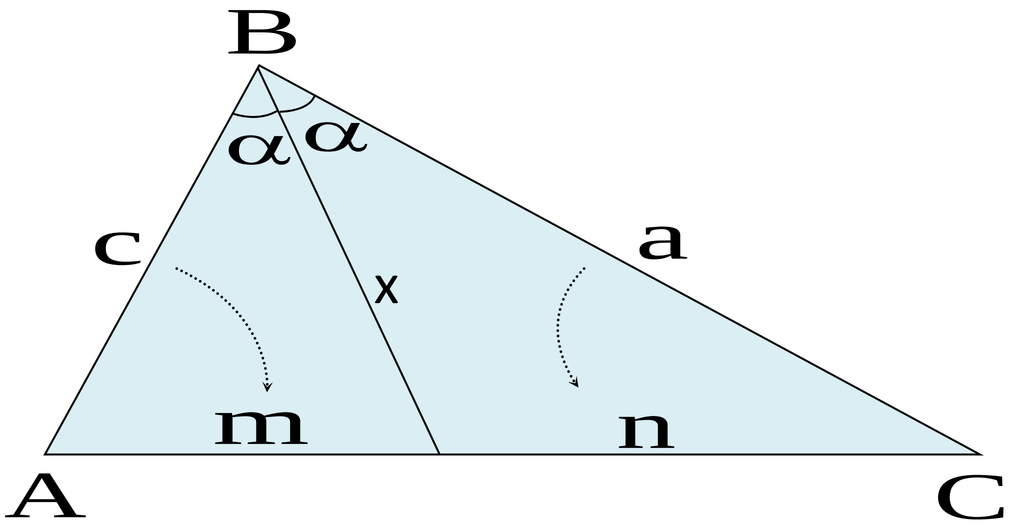
TEOREMA DE LA MEDIANA (APOLONIO)



$$a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

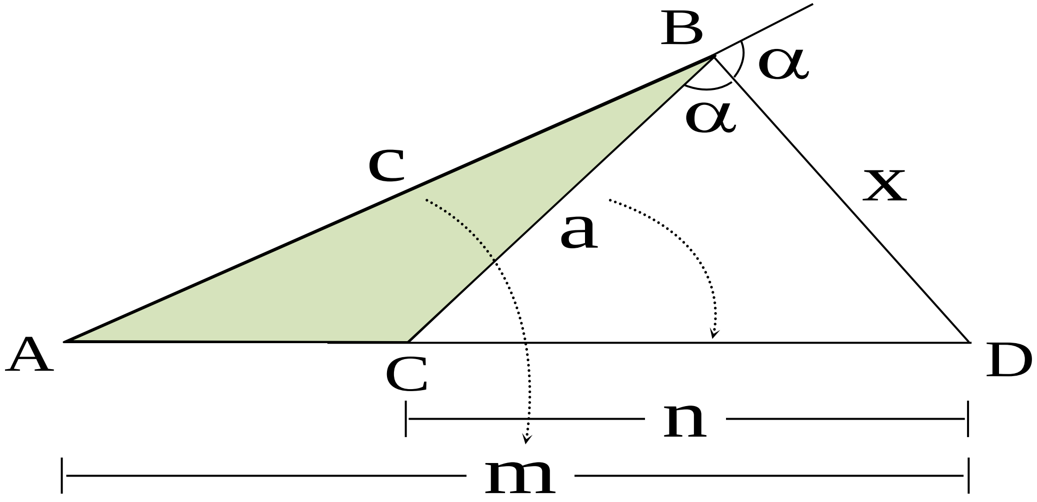
TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR



$$x^2 = ac - mn$$

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{n}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

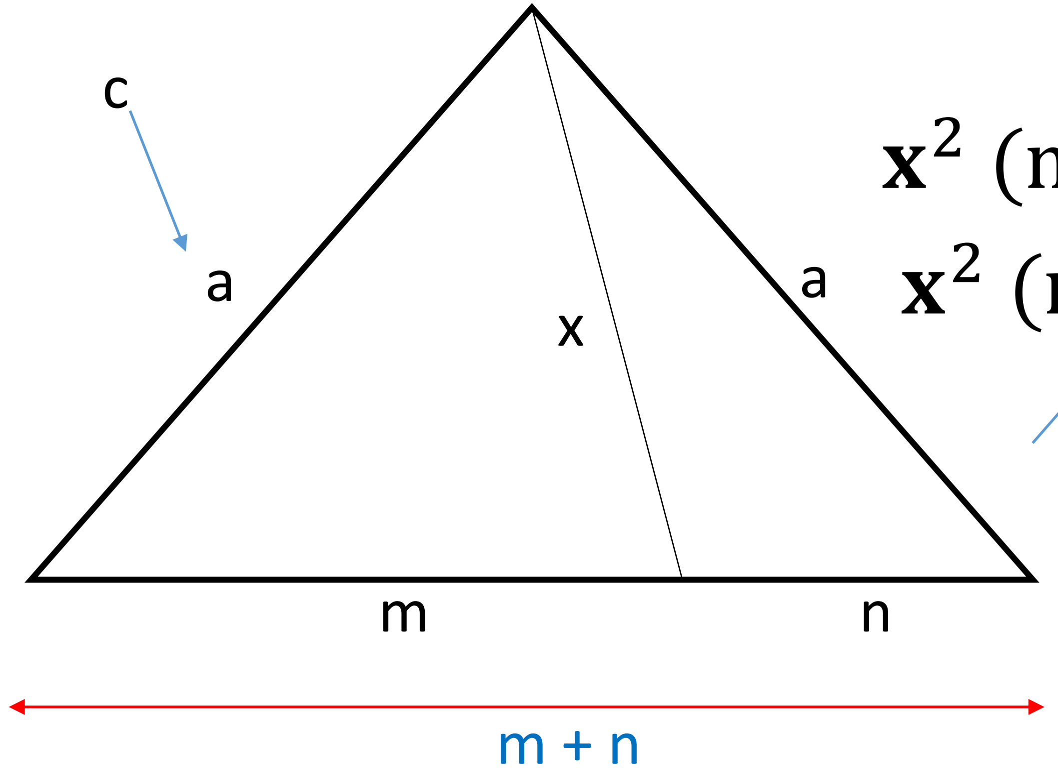


$$x^2 = mn - ac$$

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{n}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

TEOREMA DE STEWART PARTICULAR



$$\mathbf{x^2\, b = a^2\, m + c^2\, n - mnb}$$

$$\mathbf{x}^2\,(\mathrm{m+n}) = \mathbf{a^2\, m + a^2\, n - mn(m+n)}$$

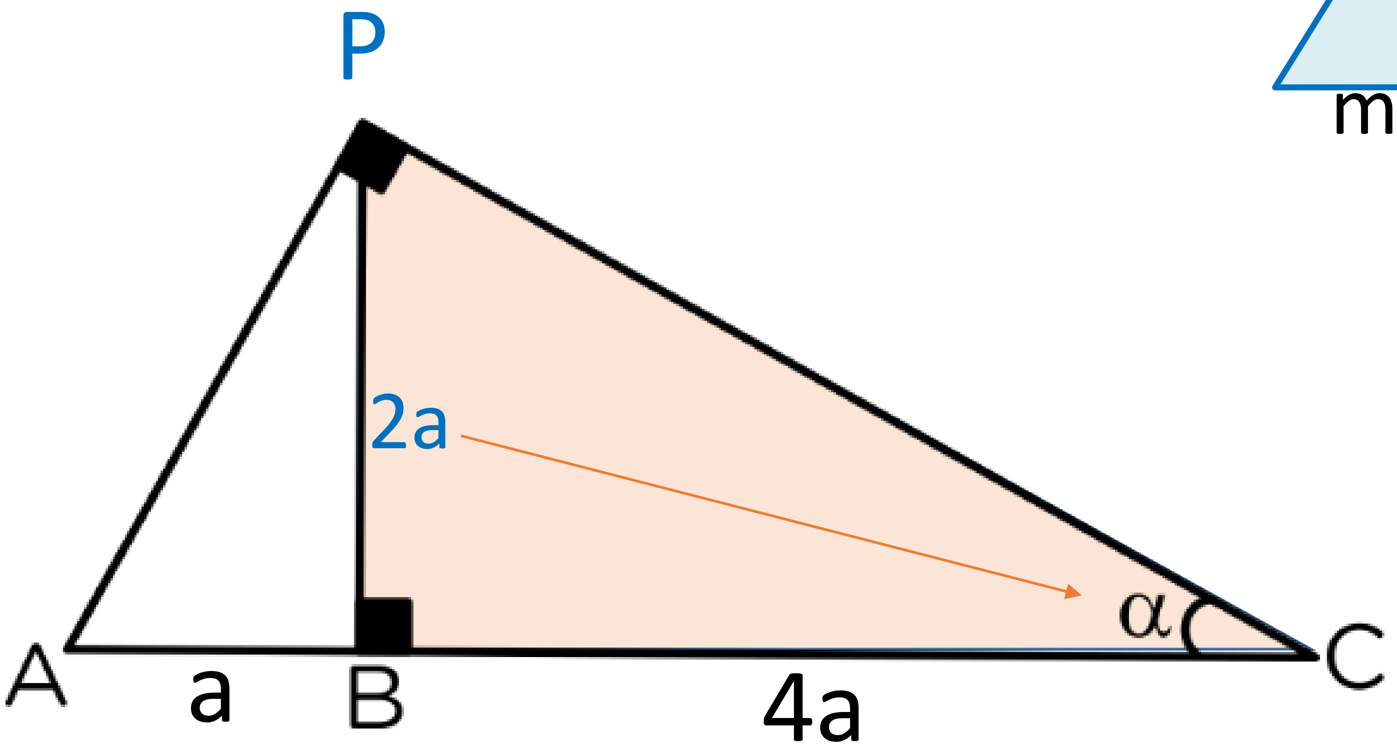
$$\mathbf{x}^2\,(\mathrm{m+n}) = \mathbf{a^2\,(m + n) - mn(m+n)}$$

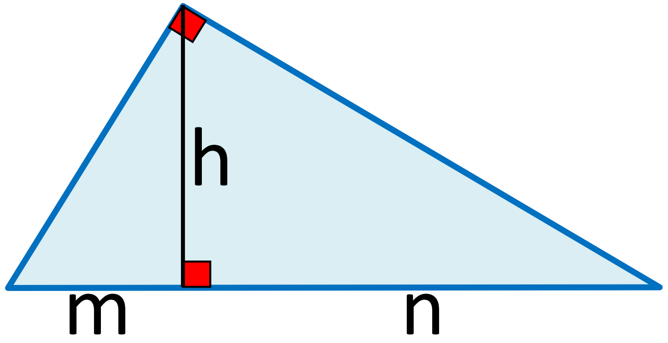
$$\mathbf{x^2 = a^2 - mn}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

RESOLUCIÓN 1





$h^2 = m.n$

$PB^2 = (a).(4a)$

$PB = 2a$

→ En el triángulo PBC:

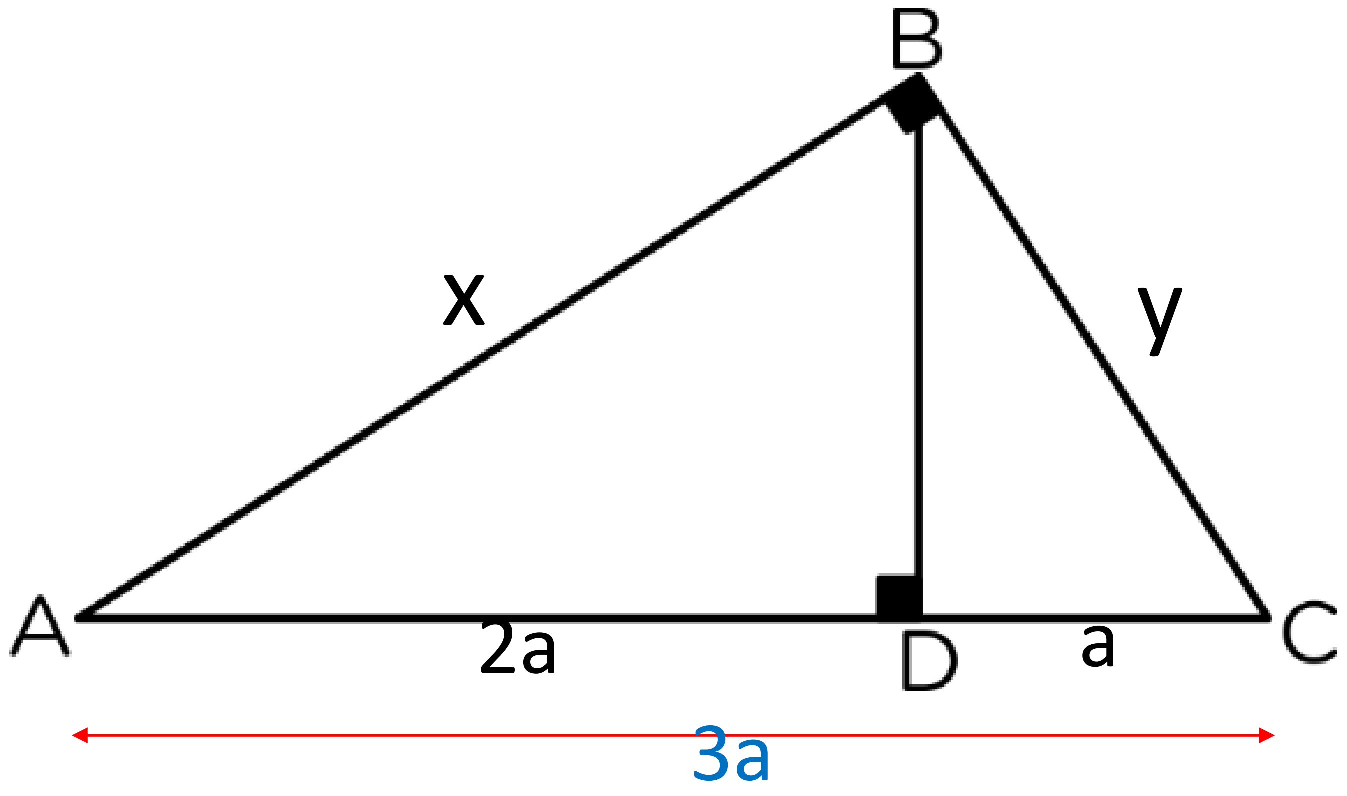
$X = 53/2$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 2

Dato: $\frac{AD}{DC} = 2$ ⇒ AD=2DC

Pide: $\frac{x}{y}$



Por relaciones métricas en el triángulo rectángulo ABC:

$$\frac{x^2 = (\cancel{3}a).(2\cancel{a})}{y^2 = (\cancel{3}a).(\cancel{a})} \quad \div$$

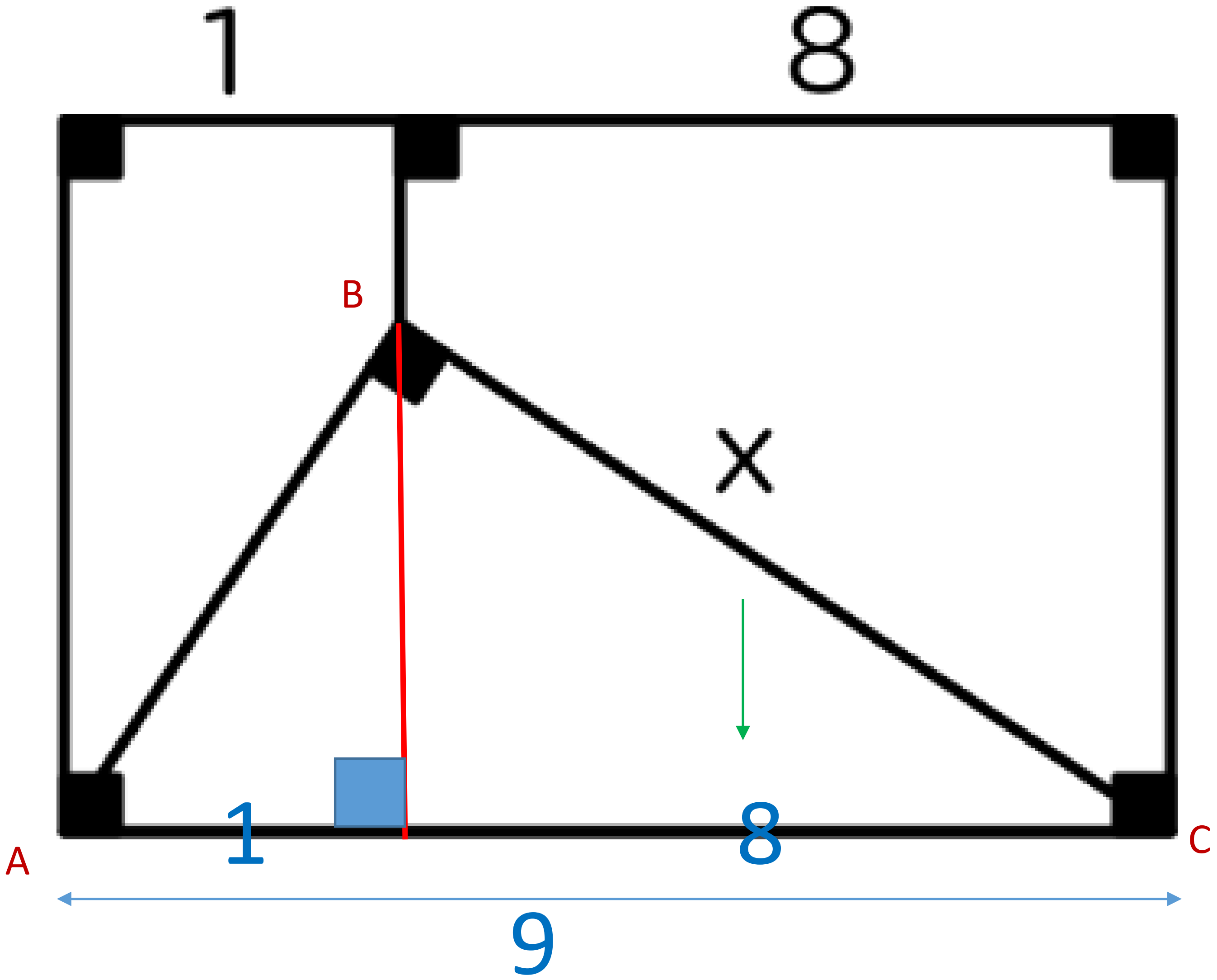
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2}{1}$$

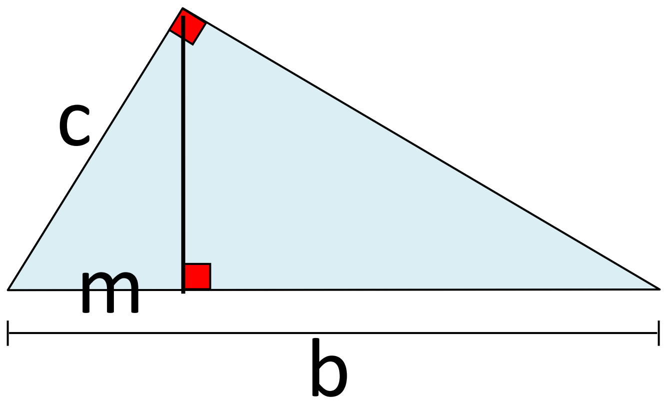
$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \sqrt{2}}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 3





$c^2 = b.m$

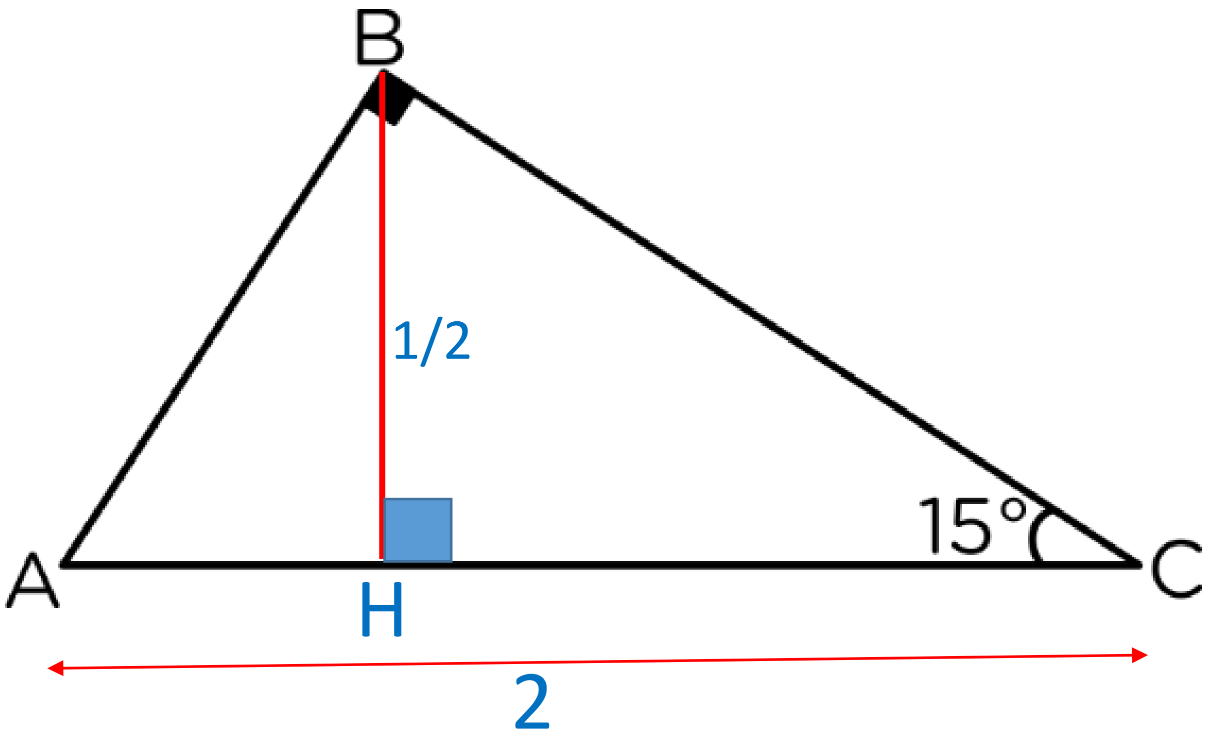
$\rightarrow x^2 = 9.8$

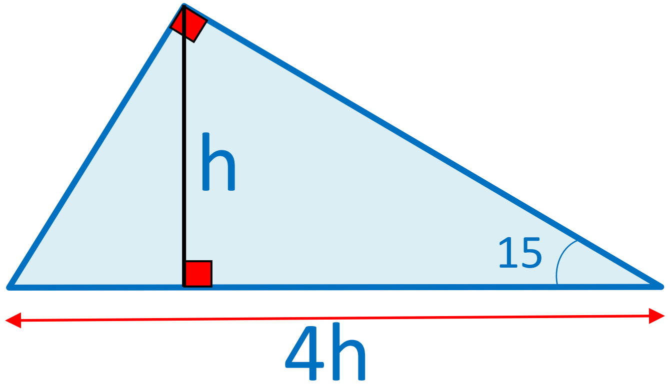
$x^2 = 36.2$

$\boxed{x = 6\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN 4

Se pide: AB.BC



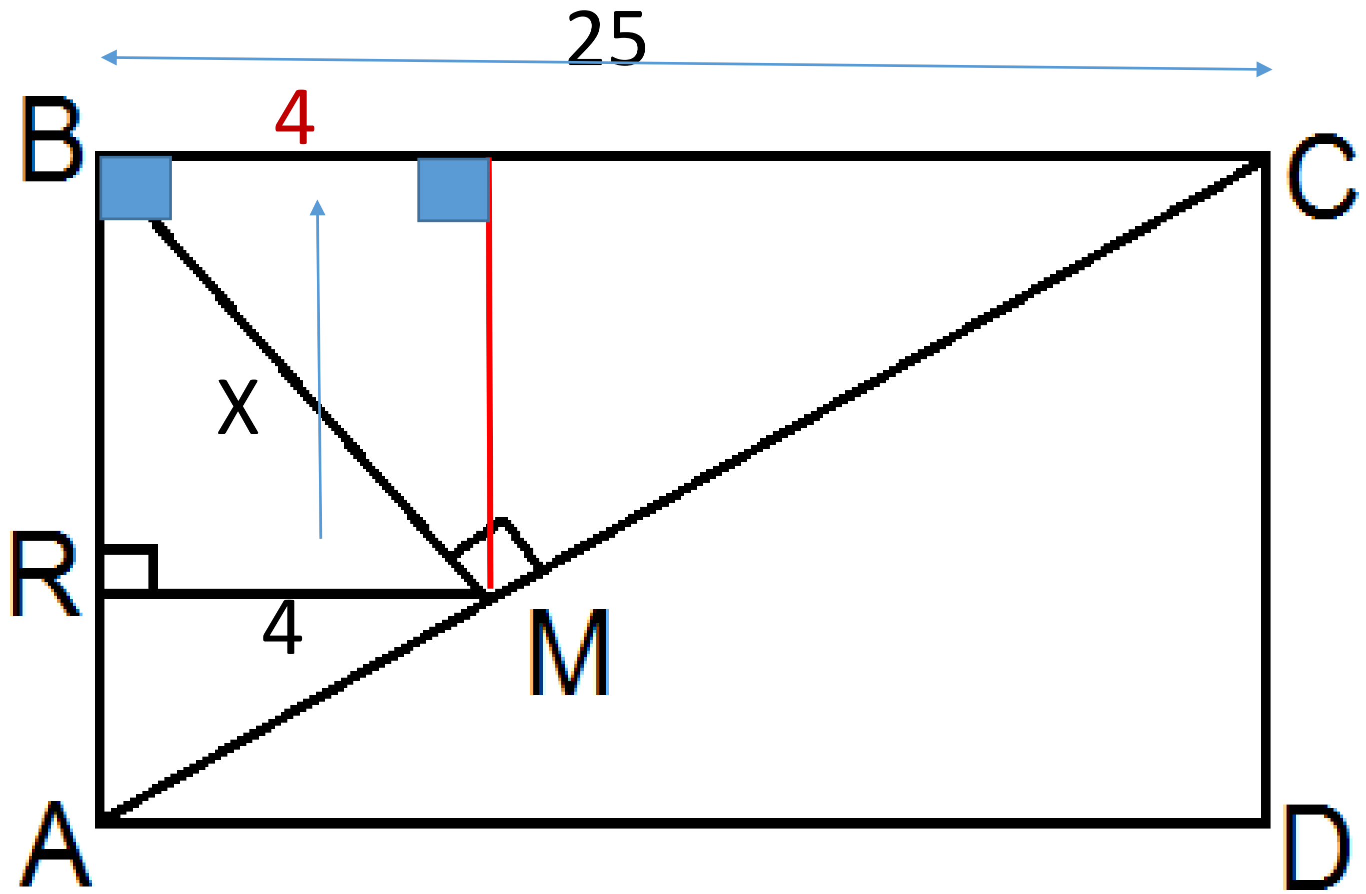


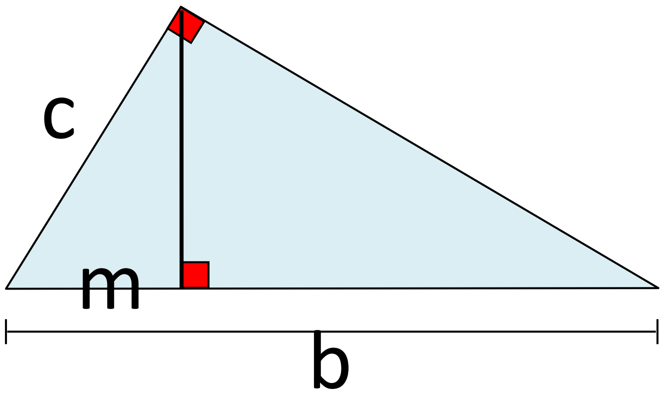
AB.BC = AC.BH

AB.BC = (2)(1/2)

AB.BC = 1

RESOLUCIÓN 5





$c^2 = b.m$

→ En el triángulo BMC:

$x^2 = 25.4$

$x = 10$

RESOLUCIÓN 6

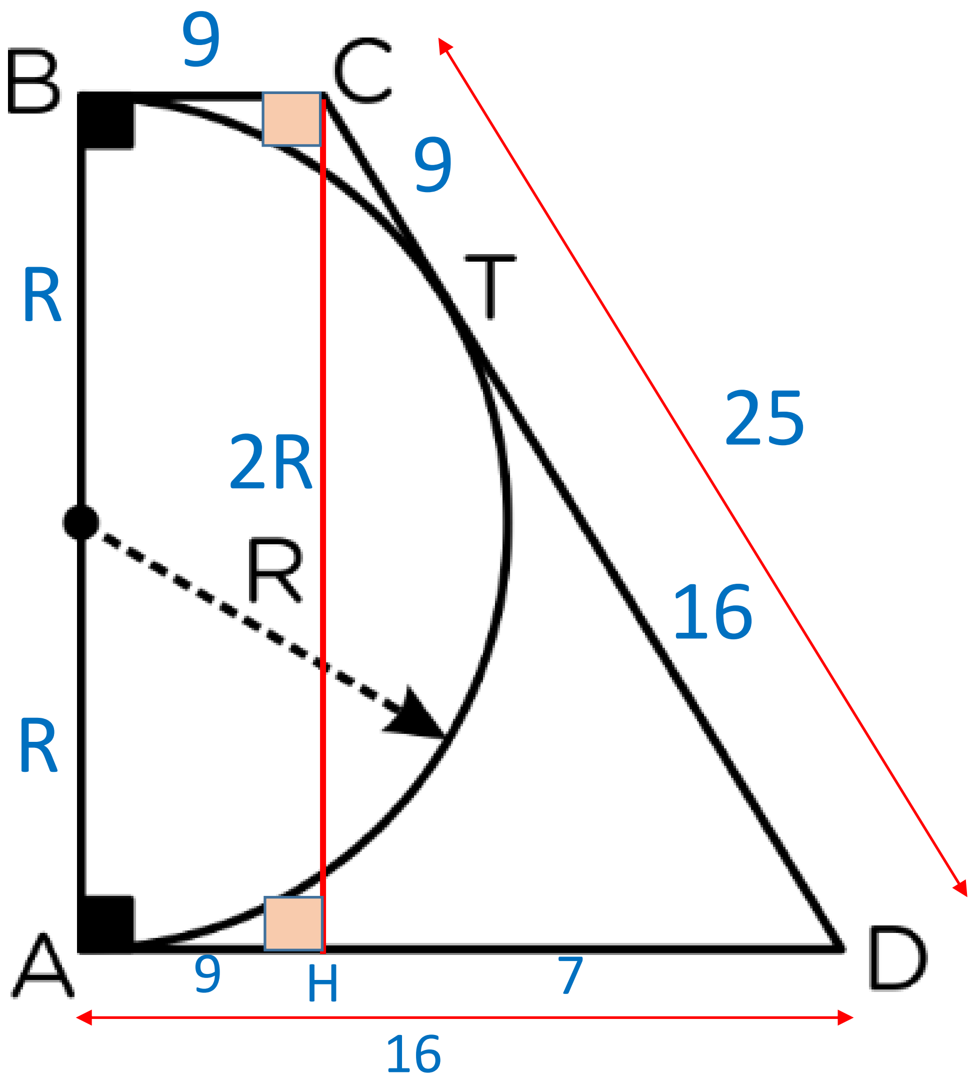
→ En el triángulo rectángulo CHD:

$$25^2 = 7^2 + (2R)^2$$

$$576 = (2R)^2$$

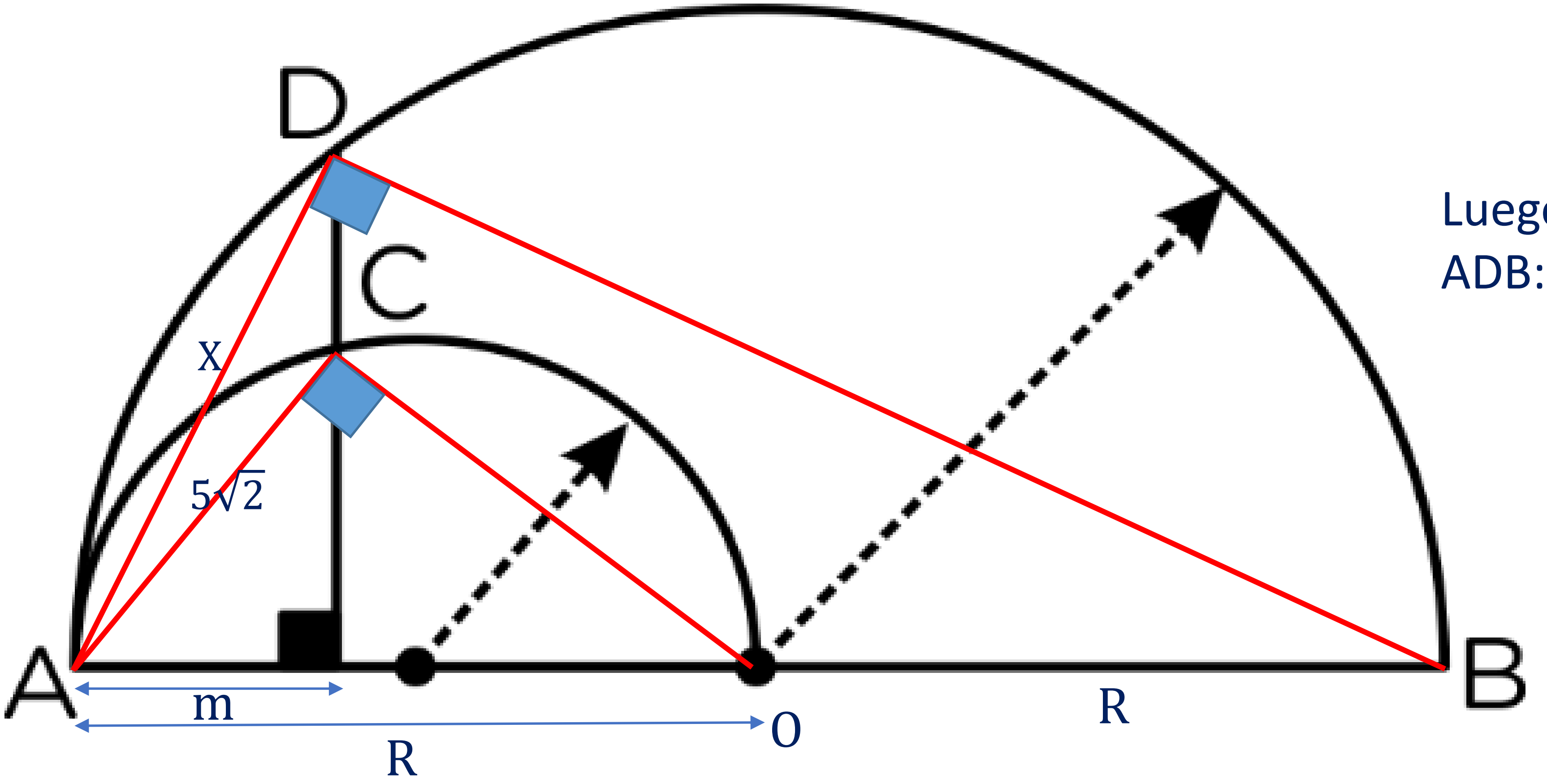
$$24 = 2R$$

$$\boxed{12 = R}$$



RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 7



→ Del triángulo rectángulo ACO:

$$(5\sqrt{2})^2 = R.m$$

$$50 = R.m$$

Luego, del triángulo rectángulo ADB:

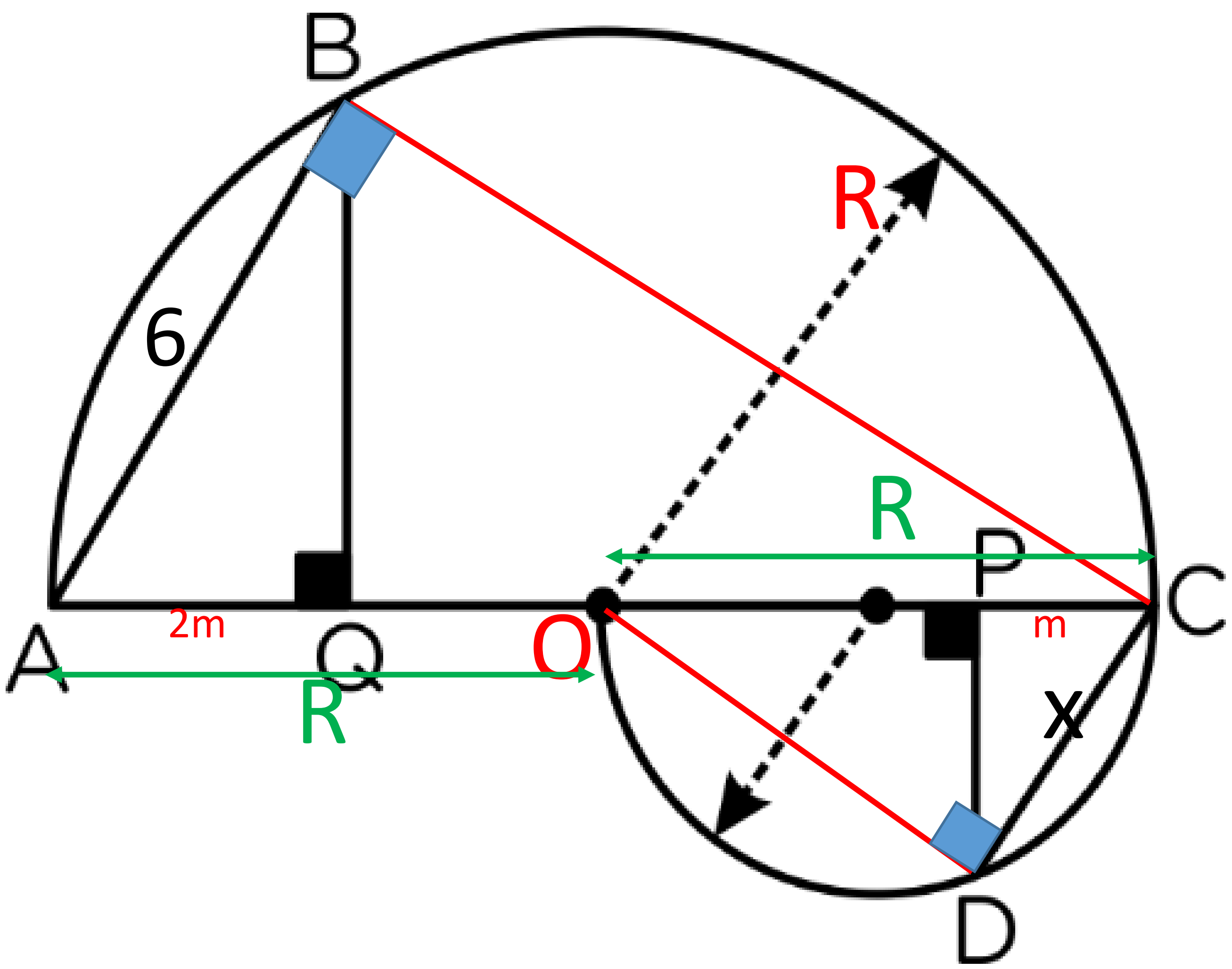
$$x^2 = 2R.m$$

$$x^2 = 2.50$$

$$x^2 = 100$$

$$\boxed{X = 10}$$

RESOLUCIÓN 8



→ En el triángulo ABC:

$$6^2 = 2R.\,2m$$

$$9 = R.\,m$$

Luego, en el triángulo ODC:

$$x^2 = R.\,m$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

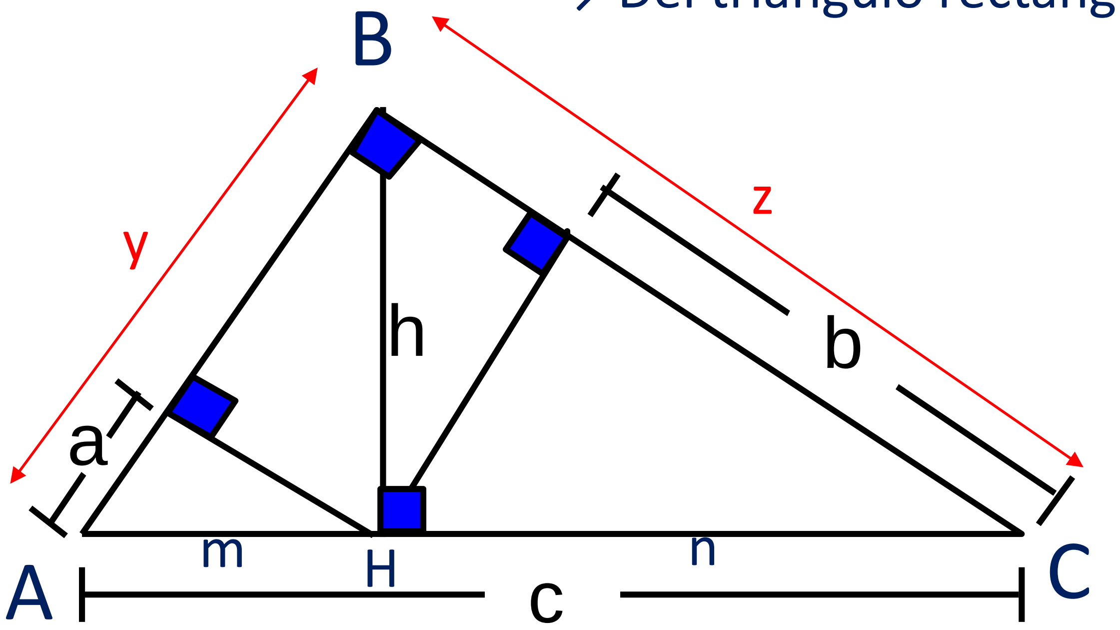
RESOLUCIÓN 9

→ Del triángulo rectángulo ABC: $h^2 = m.n$ ∧ $y.z = c.h$

→ Del triángulo rectángulo AHB: $m^2 = y.a$

→ Del triángulo rectángulo CHB: $n^2 = z.b$

×



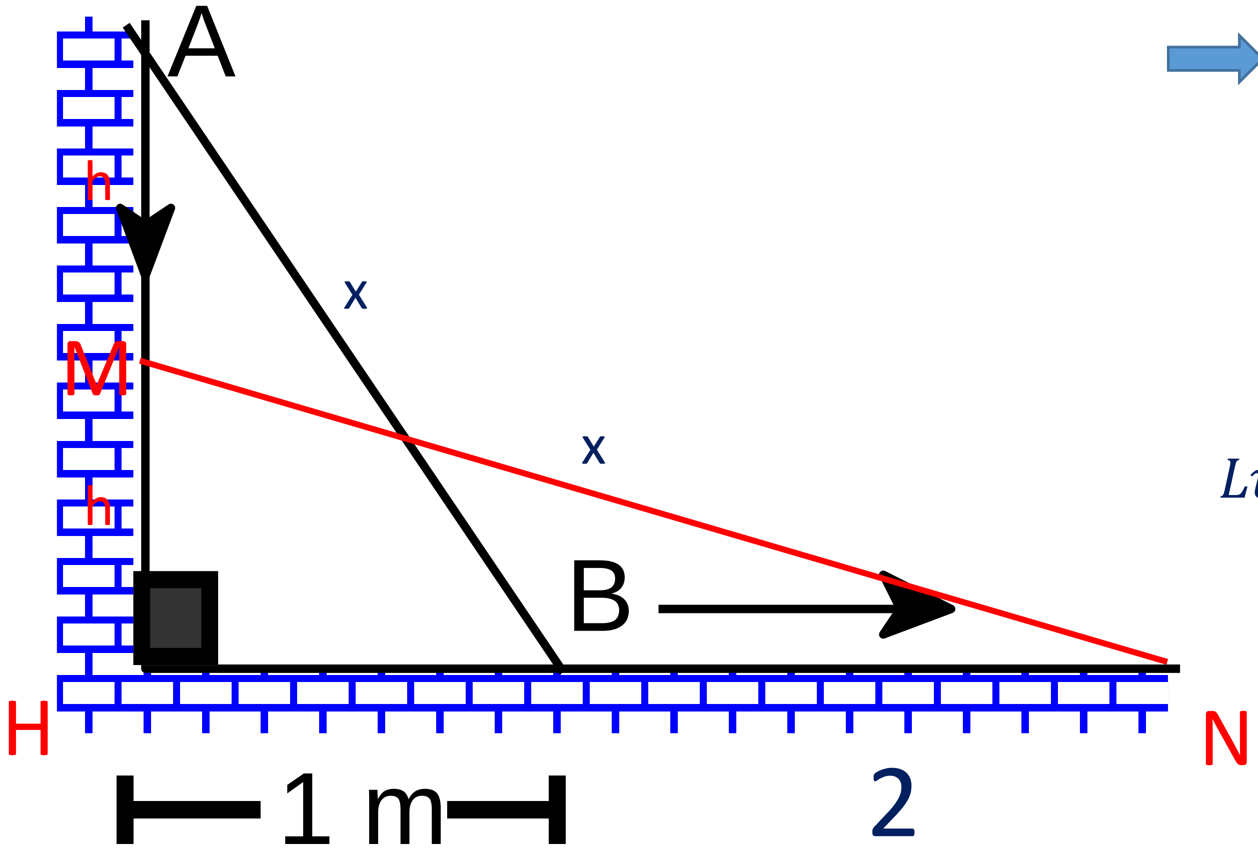
$$m^2n^2 = yz.ab$$

$$(mn)^2 = yz.ab$$

$$(h^2)^2 = ch.ab$$

$$\boxed{h^3 = abc}$$

RESOLUCIÓN 10



$\Delta MHN: \quad x^2 = h^2 + 3^2$

$\Delta AHB: \quad x^2 = (2h)^2 + 1^2$

$\Rightarrow \quad h^2 + 3^2 = (2h)^2 + 1^2$

$8 = 3h^2$

$8/3 = h^2$

Luego: $x^2 = h^2 + 3^2$

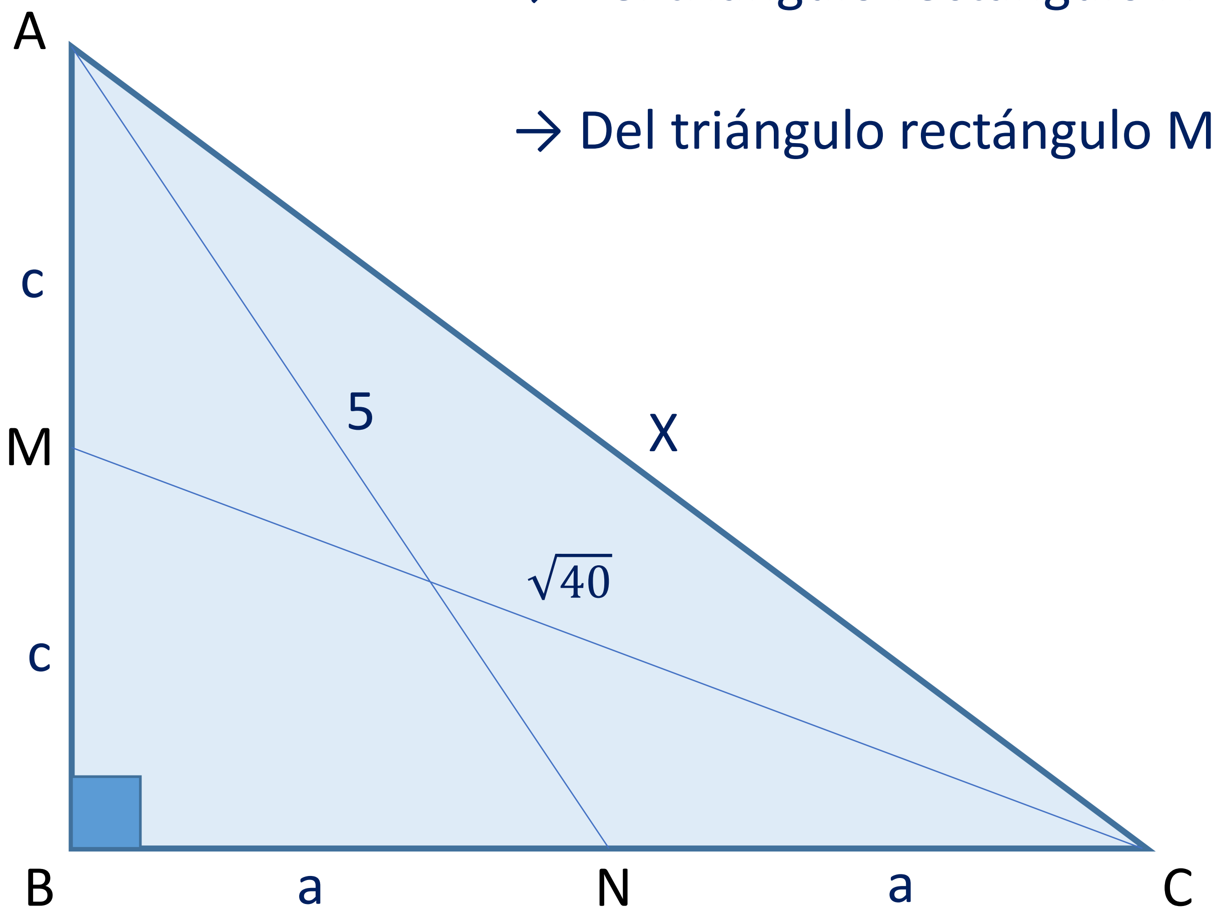
$x^2 = 8/3 + 3^2$

$x^2 = 35/3$

$x = \sqrt{35/3}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 11



Por el teorema de Pitágoras:

→ Del triángulo rectángulo ABN: $5^2 = a^2 + (2c)^2$ ⇒ $25 = a^2 + 4c^2$

→ Del triángulo rectángulo MBC: $\sqrt{40}^2 = c^2 + (2a)^2$ ⇒ $40 = c^2 + 4a^2$

Se suma las ecuaciones: $65 = 5c^2 + 5a^2$

$13 = c^2 + a^2$

→ Del triángulo rectángulo ABC:

$$X^2 = (2a)^2 + (2c)^2$$

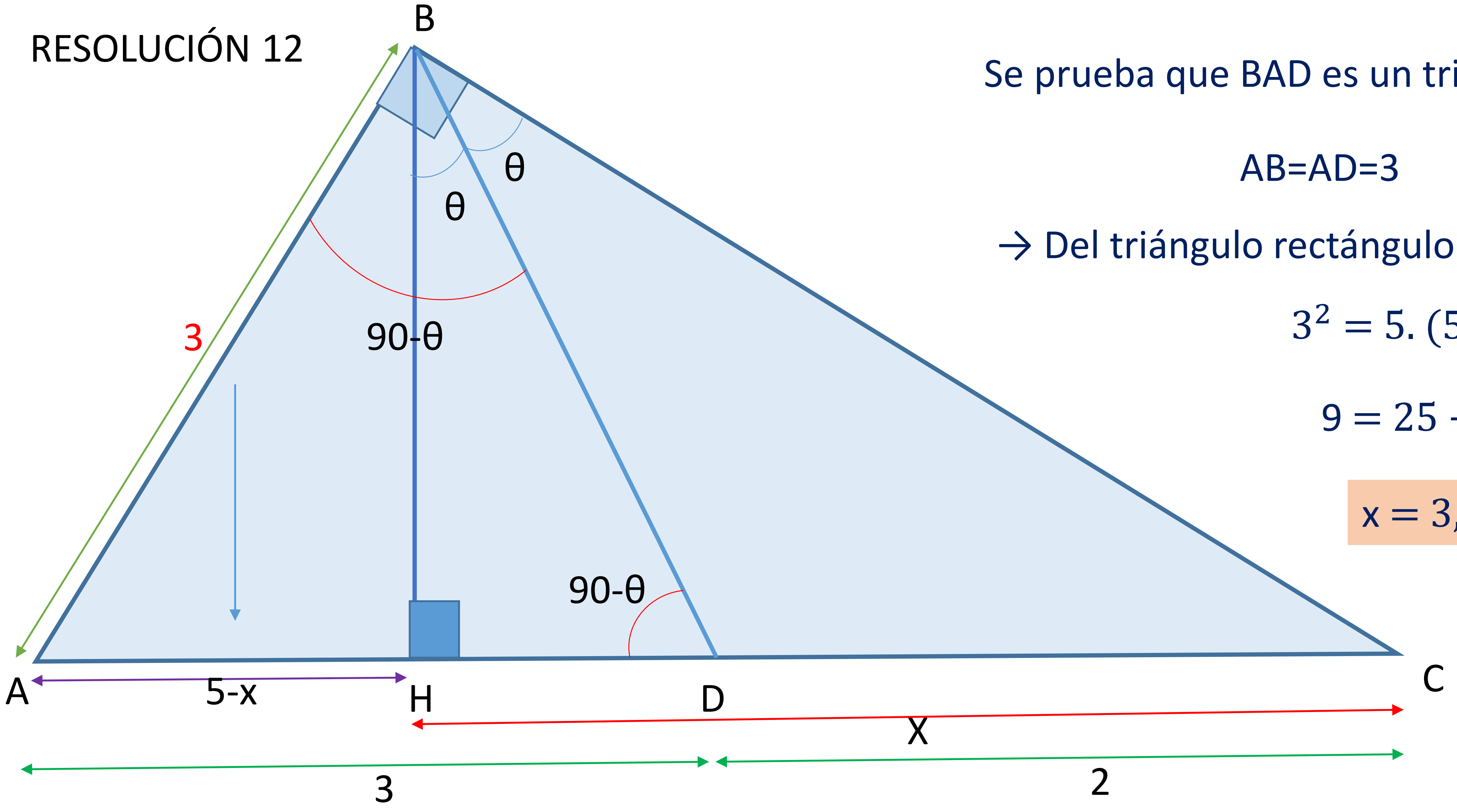
$$X^2 = 4a^2 + 4c^2$$

$$X^2 = 4(a^2 + c^2)$$

$$X^2 = 4(13)$$

$X = 2\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN 12



Se prueba que BAD es un triángulo isósceles

AB=AD=3

→ Del triángulo rectángulo ABC:

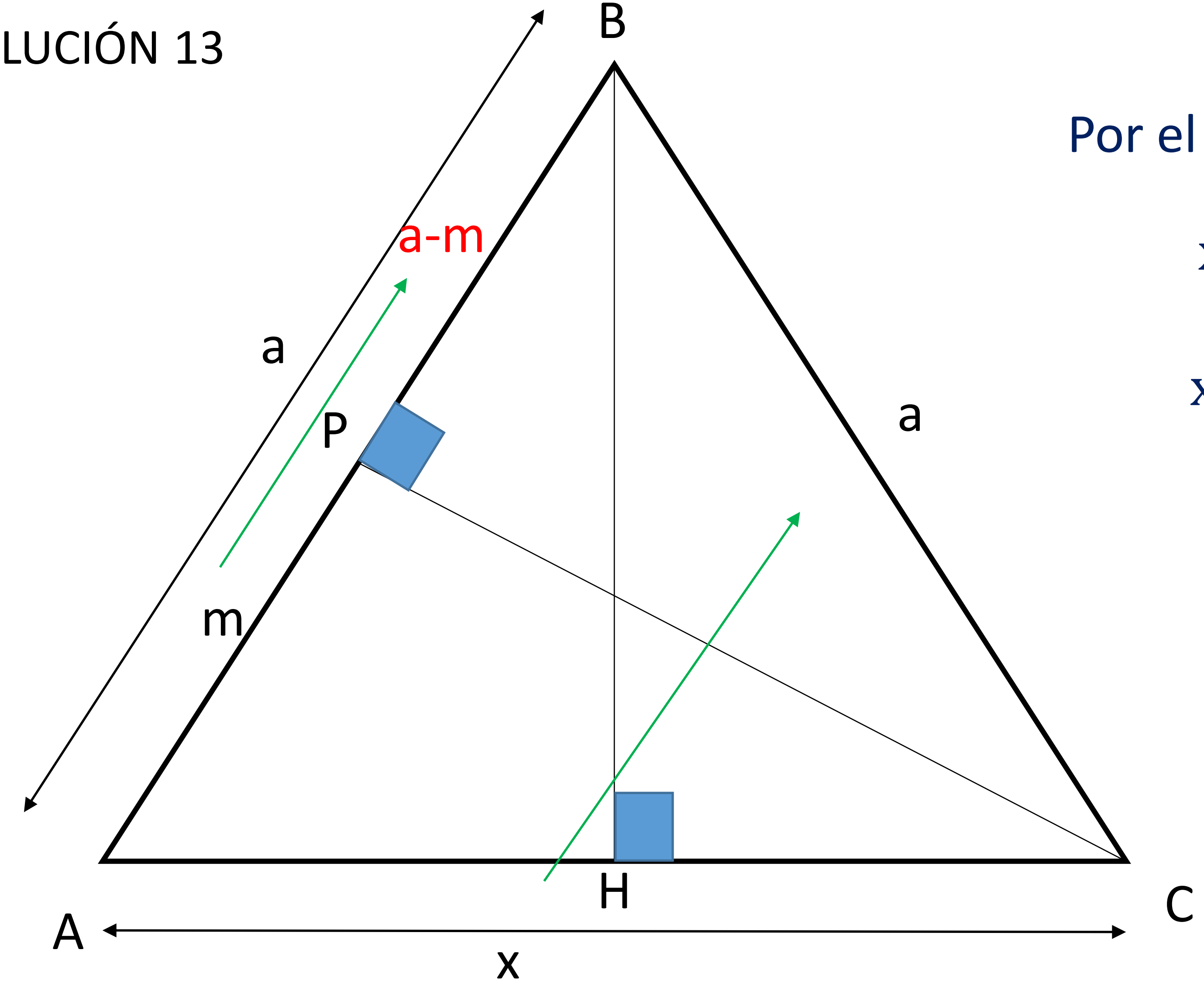
$$3^2 = 5.(5-x)$$

$$9 = 25 - 5x$$

$$\boxed{x = 3{,}2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 13



Dato: ma = 32

Por el teorema de las proyecciones:

$$x^2 - a^2 = m^2 - (a - m)^2$$

$$x^2 - \cancel{a^2} = \cancel{m^2} - (\cancel{a^2} + \cancel{m^2} - 2am)$$

$$x^2 = 2am$$

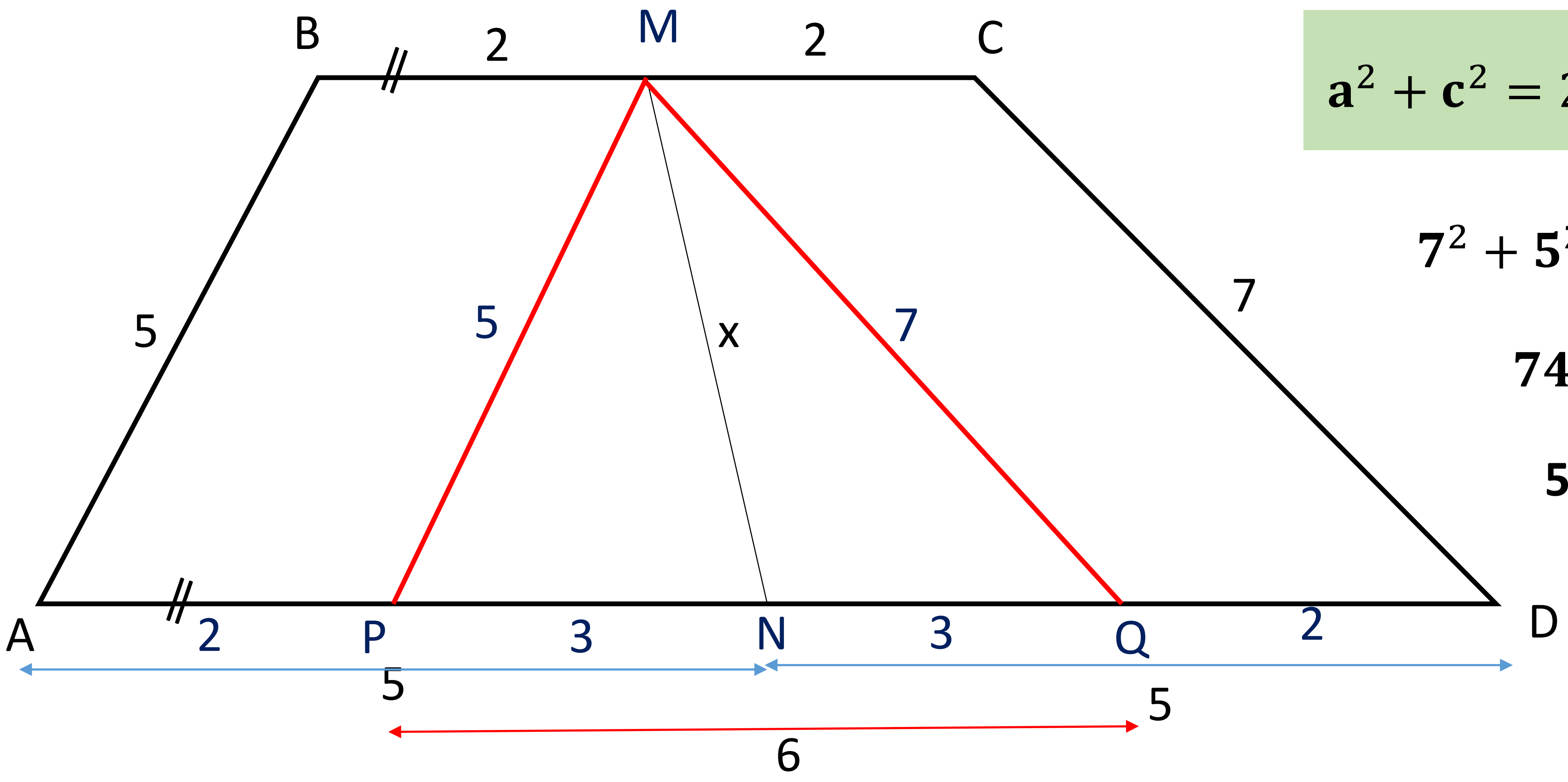
$$x^2 = 2(32)$$

$$x^2 = 64$$

$$\boxed{x = 8}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 14



POR EL TEOREMA DE LA MEDIANA (APOLONIO)

EN EL ΔPMQ:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 = 2\mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{b}^2}{2}$$

$$\mathbf{7}^2 + \mathbf{5}^2 = 2\mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{6}^2}{2}$$

$$\mathbf{74} = 2\mathbf{x}^2 + \mathbf{18}$$

$$\mathbf{56} = 2\mathbf{x}^2$$

$$\mathbf{28} = \mathbf{x}^2$$

$$\mathbf{4.7} = \mathbf{x}^2$$

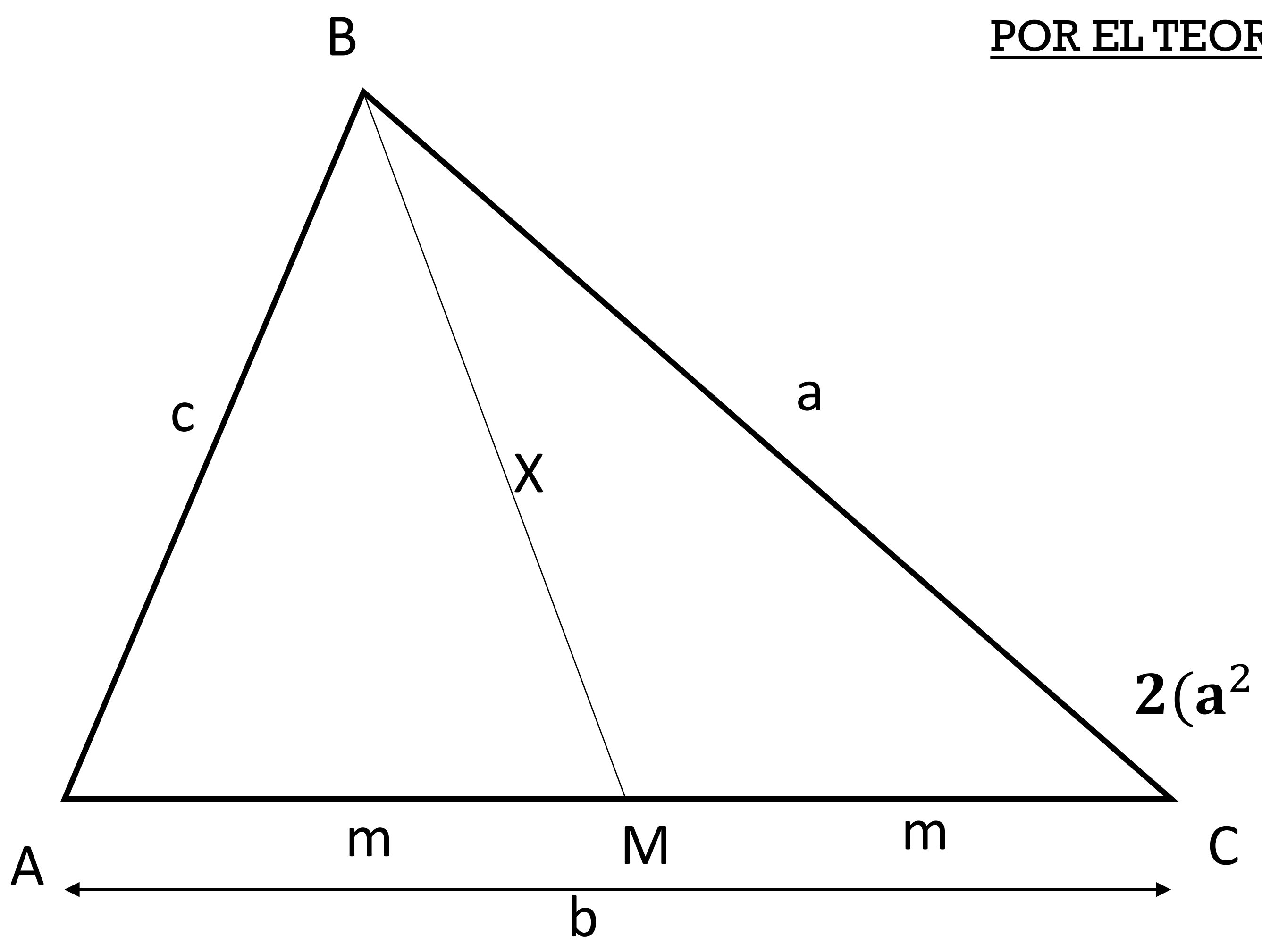
$$\mathbf{X} = 2\sqrt{7}$$

RESOLUCIÓN 16

Sean x, y, z las longitudes de las medianas del triángulo ABC

$$\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2=\mathbf{63}$$

Pide: $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2 = k$



POR EL TEOREMA DE LA MEDIANA (APOLONIO)

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{c}^2=2\mathbf{x}^2+\frac{\mathbf{b}^2}{2}$$

$$\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2=2\mathbf{y}^2+\frac{\mathbf{a}^2}{2}$$

$$\mathbf{b}^2+\mathbf{a}^2=2\mathbf{z}^2+\frac{\mathbf{c}^2}{2}$$

+

$$\mathbf{2}(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)=\mathbf{2}(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)+\frac{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2}{2}$$

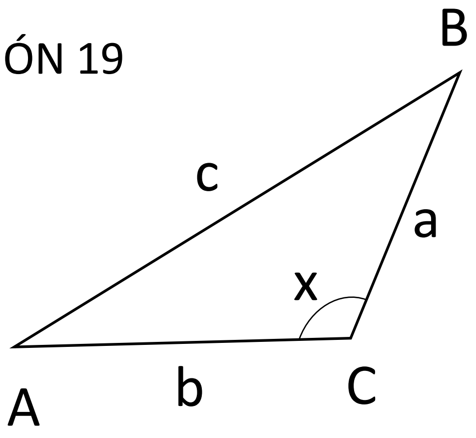
$$2k=2(63)+\frac{k}{2}$$

$$\frac{3k}{2}=2(63)$$

$$\boxed{k=84}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

RESOLUCIÓN 19



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosx$$

$$2abcosx = a^2 + b^2 - c^2$$

$$(2abcosx)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$(2abcosx)^2 = ((a^2 + b^2) - c^2)^2$$

$$(2abcosx)^2 = (a^2 + b^2)^2 + (c^2)^2 - 2(a^2 + b^2).\,c^2$$

$$(2abcosx)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2.b^2 + c^4 - 2(a^2 + b^2).\,c^2$$

$$(2abcosx)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2.b^2 - 2(a^2 + b^2).\,c^2$$

Sin embargo, del dato: $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$

$$(2abcosx)^2 = \cancel{2.\,c^2\,(a^2 + b^2)} + 2a^2.b^2 \cancel{- 2(a^2 + b^2).\,c^2}$$

$$(2abcosx)^2 = 2a^2.b^2 \Rightarrow (cosx)^2 = \frac{1}{2}$$

$$Cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45$$

$$Cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 135}$$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS